2da Lista de Ejercicios
Álgebra Moderna

1. Demuestre que $\langle s, r \,|\, r^n = s^2 = e, rs = sr^{-1} \rangle$ es una presentación de D_{2n}.

2. Sean a y b elementos distintos de orden 2 en un grupo G y supongamos que ab tiene orden finito $n \geq 3$. Demostrar que el subgrupo generado por a y b en G es isomorfo al grupo diédrico D_{2n}.

3. Defina la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ por $A \sim A' \iff A' = \pm A$. Demuestre que $\sim$ es compatible con la estructura de grupo y que el cociente $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ (esto es, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$) está generado por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de índice p, donde p es el menor primo que divide a $|G|$. Demuestre que H es normal en G.

5. Demuestre que si H y K son subgrupos finitos de G cuyos ordenes son primos relativos entonces $H \cap K = 1$.