Probabilidad

Lista de Problemas 6

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 26/9/17.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a.i. con $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i$ y $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ para $i \geq 1$. Suponga que existe M tal que $0 < \sigma_i^2 < M$ para todo i. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera.

   a) Use la desigualdad de Chebychef para demostrar que
   $$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_1^n X_i - \frac{1}{n}\sum_1^n \mu_i\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_1^n \mathrm{Var}(X_i).$$

   b) Demuestre que
   $$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_1^n X_i - \frac{1}{n}\sum_1^n \mu_i\Big| > \varepsilon\Big) = 0.$$

   Demuestre que la LDGN es un caso especial de este resultado.

2. Se desea estimar la probabilidad de falla p en un proceso de producción mediante la observación de n objetos producidos, elegidos independientemente. Se sabe que p está comprendida entre 0.1 y 0.3, en virtud de la información previa de que se dispone sobre el proceso. Se desea hallar el tamaño n de la muestra para que la probabilidad de que la frecuencia relativa de objetos defectuosos en la muestra difiera del verdadero valor p en más de 0.01 sea menor que 0.05.

3. Sea $M_n = \max_{i\leq i\leq n} U_i$ donde las U_i son v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(0,1)$.

   a) Halle una expresión exacta para la probabilidad $P(|M_n - 1| > \varepsilon)$.

   b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(|M_n - 1| > \varepsilon) = 0$. ¿Es posible derivar este resultado a partir de la LDGN?

4. Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a. Demuestre que si $\mathrm{E}(X_n) \to \alpha$ y $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$ entonces $X_n \to \alpha$ en probabilidad.

5. Calcular una aproximación de la probabilidad de que el número de 6 obtenidos al lanzar un dado perfecto 12,000 veces, este comprendido entre 1,900 y 2,150.

6. Encontrar el número k tal que la probabilidad de obtener entre 490 y k veces cara en 1,000 lanzamientos de una moneda, sea igual a 1/2.

7. Se toma una muestra al azar con reposición, a efectos de estimar la fracción p de hembras en una población. Encontrar un tamaño de muestra que asegure que la estimación se hará con un error de menos de 0.005, al menos con probabilidad 0.99.

8. En un cálculo numérico mediante una computadora, 1,000 números se reemplazan por el entero más próximo. Si los errores de redondeo cometidos son independientes y la distribución de probabilidad de cada uno es uniforme en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, calcular aproximadamente la probabilidad de que la suma de los 1.000 números redondeados difiera de la suma de los 1,000 números originales en menos de 10.

9. Al lanzar una moneda 10,000 veces se obtuvieron 5,500 caras. ¿Sospecharías que la moneda no es equilibrada?

10. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con igual distribución, y supongamos que
    $$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_n) < \infty \quad n = 1, 2, \ldots$$

    a) Calcular el límite en probabilidad de
    $$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_{i+1} - X_i)^+.$$

b) En particular, indicar cuál es el resultado en (a) cuando la distribución común de las X_i es la normal $(0, 1)$.

Sugerencia: No podemos aplicar directamente la ley débil de los grandes números. ya que las variables $\{(X_{i+1} - X_i)^+\}$ no forman una sucesión de variables aleatorias independientes. Sin embargo, si $i + 1 < j$, $(X_{i+1} - X_i)^+$ y $(X_{j+1} - X_j)^+$ si resultan independientes. Aproveche esta observación para acotar $\mathrm{Var}(Y_n)$ y probar que tiende a cero cuando $n \to \infty$.

11. Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de variables independientes con distribución $\mathcal{U}(-1, 1)$ y sea $T_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2$. ¿Es cierto que para algún a y todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - a| > \varepsilon) = 0?$$

Si es cierto, explique por qué y halle el valor de a.

12. Una compañía de seguros tiene 50,000 personas de una cierta edad y grupo social aseguradas. La probabilidad de defunción en el curso de un año es de 0.006 para cada persona. Cada person asegurada paga al inicio del año 400 pesos y en caso de fallecer el beneficiario de la póliza recibe 50,000 pesos. Calcular la probabilidad de que en el transcurso de un año la compañía

a) tenga pérdidas,

b) tenga ganancias de al menos 3 millones de pesos,

c) tenga ganancias de al menos 8 millones de pesos,

13. Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.ai.i.i.d. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Halle el límite en probabilidad de la sucesión $Y_n, n \geq 1$ definida por

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2.$$

14. Demuestre la siguiente versión de la desigualdad de Chabychef: Sea $\mathrm{E}(X) = \mu$,

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{E}(|X - \mu|)$$

15. Use la desigualdad de Chebychef para demostrar que si X, Y son variables aleatorias con $\mathrm{E}((X - Y)^2) = 0$ entonces $P(X = Y) = 1$, es decir, X y Y son iguales con probabilidad 1.

16. Sea X una v.a. con media μ y varianza σ^2. Definimos la desviación relativa D de X respecto de su media por

$$D = \left|\frac{X - \mu}{\mu}\right|.$$

a) Demuestre que $P(D \geq a) \leq \sigma^2/(\mu a)^2$.

b) Si X es una v.a. con $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 100/3$, halle una cota para $P(D \geq 0.2), P(D \geq 0.5), P(D \geq 0.9)$ y $P(D \geq 2)$.