Probabilidad

Lista de Problemas 14

1. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge c.s. a 0. Probar que $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge c.s. a 0. Dar un ejemplo que demuestre que el resultado no es cierto para la convergencia en probabilidad.

2. Probar que si $(X_n)_n$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones $U(a,b)$, entonces $M_n = \sup_{k<n} X_k$ converge c.s..

3. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad a la variable aleatoria X. Probar que si para cada n, $X_n \leq X_{n+1}$ c.s., entonces la sucesión converge c.s..

4. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad a la variable aleatoria X, y f una función uniformemente continua. Probar a partir de la definición de convergencia en probabilidad que la sucesión $(f(X_n))_n$ converge en probabilidad. (El resultado también es cierto si f es continua, pero es un poco más difícil de probar).

5. Probar que si $(X_n)_n$ es una sucesión de variables aleatorias independientes que converge en probabilidad, entonces la variable límite ha de ser constante c.s..

6. Sean $(X_n)_n$ v.a.i.i.d. con función de distribución

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1-(1-x)^{\lambda} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Probar que si $M_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$ entonces $n^{1/\lambda} M_n - n^{1/\lambda} \xrightarrow{L} X$, donde X es una v.a. con función de distribución $F(x) = e^{-(-x)^{\lambda}}$ si $x \leq 0$ y $F(x) = 1$ para $x > 0$.

7. Dar un ejemplo que pruebe que $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} Y$ no implica $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.

8. Dar ejemplos de: a) Variables que converjan en ley y sus densidades no converjan.

   b) Sucesiones de variables con densidad que converjan a una variable sin densidad.

   c) Variables con distribución discreta que converjan a una que tenga densidad.

9. Demuestre que una sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ converge c.s. si y solo si es de Cauchy c.s.

10. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables i.i.d. con

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

y sea $Y_n = \sum_1^n (X_i/2^i)$. Demuestre que Y_n converge débilmente e identifique la distribución límite.

11. Determine si las siguientes sucesiones de variables independientes satisfacen la LDGN y el TCL.

    - $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2}$.
    - $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2^{2k+1}}, P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{2^k}$.
    - $P(X_k = 2^{-k}) = P(X_k = -2^{-k}) = \frac{1}{2}$.

12. Determine si las siguientes sucesiones de variables independientes satisfacen la LFGN.

    - $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2}$.
    - $P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}, P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i. con media μ y varianza $\sigma^2 > 0$.A partir de la desigualdad de Chebychef demuestre que para $\varepsilon > 0$ se tiene
$$P\Big(\Big|\frac{n^{1/4}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{n}}.$$

14. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Para $n \geq 1$ definimos
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$
Halle media y varianza para las variables X_i^2 y use el Teorema Central de Límite para aproximar $P(Y_{100} > 110)$.