Nombre: ____

1	2	3	4	5	6	T

Probabilidad
Primer Examen

Parte 2

Para entregar antes de las 12:30 pm del miércoles 13 de septiembre de 2017.
Este examen es estrictamente individual.
Puedes consultar libros o notas de clase y puedes preguntar al profesor y a los ayudantes pero no a tus compañeros.

1. (**2 ptos.**) Aída tiene el siguiente sistema para jugar a la lotería y quiere ganar al menos un millón de pesos. Los lunes compra un boleto para la lotería del martes. Si gana al menos un millón no apuesta más. En caso contrario el jueves compra un boleto para la lotería del viernes. Si gana al menos un millón, deja de jugar mientras que si pierde, repite el procedimiento la siguiente semana. Suponga que en la lotería del martes su probabilidad de ganar al menos un millón de pesos es p_1 mientras que en la lotería del viernes es p_2. Sea N el número de veces que Aída juega a la lotería hasta ganar.

   a) Halle la distribución de N.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que N sea par?
   c) Halle $\mathrm{E}(N)$.

2. (**2 ptos.**) Una caja contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Se extrae al azar una bola de la caja y se vuelve a meter en ella junto con otra bola del mismo color. Este procedimiento se repite dos veces más.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas extraídas hayan sido blancas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola haya sido blanca?
   c) Si la segunda bola es negra ¿cuál es la probabilidad de que la tercera sea blanca?
   d) Si la tercera bola es blanca ¿cuál es la probabilidad de que la segunda haya sido negra?

3. (**2 ptos.**) Explique en detalle como utilizaría el método de rechazo para simular valores de las siguientes distribuciones:

   a) Distribución con densidad $f(x) = \frac{e^x}{e-1}, \quad 0 \le x \le 1$.
   b) Distribución con densidad $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} e^{-x}, \quad x > 0$.
   c) Distribución con densidad $f(x) = \frac{1}{2}(1+x)e^{-x}, \quad x > 0$.
   d) Función de distribución

   $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor} & \text{para } x \ge 1. \end{cases}$$

   ($\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero que es menor o igual que x).

   En cada caso trate de optimizar el proceso y calcule el número promedio de iteraciones necesarias para simular un valor de la variable aleatoria.

4. (**1 pto.**) Sean A y B eventos con $0 < P(A) < 1$ y $0 < P(B) < 1$

   a) Si A y B son disjuntos ¿pueden ser independientes?

b) Si A y B son independientes ¿pueden ser disjuntos?

c) Si $A \subset B$ ¿pueden ser independientes?

d) Si A y B son independientes ¿pueden A y $A \cup B$ ser independientes?

5. (**1 pto.**) Sea $A_1, \dots, A_n$ una colección de eventos independientes con $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) < 1$. ¿Es posible que $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$? Justifica tu respuesta.

6. (**2 ptos.**) Sea Ω un conjunto. Decimos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de Ω si

   i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

   ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

   iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

   Sea Ω un conjunto numerable y sea $\mathcal{A}$ la colección de los subconjuntos finitos de Ω y sus complementos, es decir $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}$.

   a) Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

   b) Definimos la función μ sobre $\mathcal{A}$ por $\mu(A) = 0$ si A es finito y $\mu(A) = 1$ si A^c es finito. Demuestre que μ es (finitamente) aditiva pero si $A_n, n \geq 1$ es una colección de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ y $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, no necesariamente se tiene que

   $$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

   de modo que μ no es σ-aditiva sobre $\mathcal{A}$.

   c) Demuestre que existe una sucesión creciente $A_n, n \geq 1$ de conjuntos en $\mathcal{A}$ con $A_n \uparrow \Omega$ pero $\mu(A_n) = 0$ para $n \geq 1$.