Medida e Integración
Problemas IX
Los problemas 1, 3, 4, 5 y 8 son para entregar el lunes 12/10/09.

1. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable según Lebesgue y sea
$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\, d\lambda(t).$$
Demuestre que F es uniformemente continua.

2. Carathéodory define la integral de Lebesgue de una función real, medible, no-negativa sobre un conjunto E como la medida de Lebesgue del conjunto
$$\int_E f(x)dx = \lambda(\{(x,y) : x \in E, 0 \le y \le f(x)\}).$$
Demuestre que esta definición es equivalente a la que dimos en clase.

3. (Lema de Pratt) Demuestre la siguiente variante del teorema de convergencia dominada y el lema de Fatou: Sea $X_n,\ Y_n,\ X,\ Y$ v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que

   a) $0 \le X_n \le Y_n$, b) $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, c) $\mathrm{E}[Y_n] \to \mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[Y] < \infty$.

   Entonces $\mathrm{E}[X_n] \to \mathrm{E}[X]$. Demuestre el Teorema de Convergencia Dominada como consecuencia de este resultado

4. (Teorema de Beppo Levi) Suponga que $X_n \in L^1$ para $n \ge 1$ son v.a. tales que
$$\sup_{n\ge1} \mathrm{E}[X_n] < \infty.$$
Demuestre que si $X_n \uparrow X$ entonces $X \in L^1$ y $E[X_n] \to \mathrm{E}[X]$.

5. Sea $(f_n, n \ge 1)$ la sucesión de funciones definidas en $\mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{para } 0 \le x \le 1/n, \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & \text{para } 1/n \le x \le 2/n, \\ 0 & \text{para } x \ge 2/n. \end{cases}$$
Calcule $\liminf \int f_n d\lambda$, $\int \liminf f_n d\lambda$, $\limsup \int f_n d\lambda$, $\int \limsup f_n d\lambda$ y compare estos cuatro números. Comente.

6. Repita el ejercicio anterior para la sucesión $f_n = \mathbf{1}_{[0,1/4]}$ para n par y $f_n = \mathbf{1}_{[1/4,1]}$ para n impar.

7. Sea f una función integrable en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda\{x : |f(x)| > \alpha\} = o(\frac{1}{\alpha})$ cuando $\alpha \to \infty$.

8. Demuestre que si f es medible y finita c.s. en $\mathbb{R}$ entonces es integrable sí y sólo sí
$$\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n \lambda(2^{n-1} < |f| \le 2^n) < \infty.$$

9. Sea F una f.d., demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} (F(x+c) - F(x))dx = c$.

10. Demuestre que $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ es integrable según Riemann pero no según Lebesgue en $(-\infty, \infty)$.

11.
    a) Si F es una f.d. continua, demuestre que $\int_{\mathbb{R}} F(x)dF(x) = 1/2$. En consecuencia, muestre que si X, Y son v.a.i.i.d. con distribución F, entonces $P(X \le Y) = 1/2$, y $\mathrm{E}[F(X)] = 1/2$.

    b) Si F no es continua, $\mathrm{E}[F(X)] = 1/2 + (1/2)\sum_a P(X = a)$, donde la suma es sobre los átomos de F.

    c) Si X, Y son v.a. con f.d. $F(x)$, $G(x)$ que no tienen discontinuidades comunes, entonces $\mathrm{E}[F(Y)] + \mathrm{E}[G(X)] = 1$.

    d) Aún si F y G tienen saltos comunes, si las variables son independientes, $\mathrm{E}(F(Y)) + \mathrm{E}(G(X)) = 1 + P(X = Y)$.

12. Sea F una f.d. con saltos en los puntos $\{a_j\}$. Demuestre que la suma

$$\sum_{x-\varepsilon<a_j<x} [F(a_j) - F(a_j^-)]$$

converge a cero cuando $\varepsilon \downarrow 0$, para todo x. ¿Qué ocurre si extendemos la suma a $x - \varepsilon < a_j \leq x$?. Usando este problema demuestre la continuidad de F_c.

13. Sea F una función no-decreciente. Demuestre que también hay una descomposición $F = F_c + F_d$ en este caso, donde F_c y F_d son no-decrecientes, F_c es continua y F_d es una función de saltos.

14. Si F es una f.d. discreta y el conjunto de discontinuidades es denso en $\mathbb{R}$, demuestre que la función inversa no-decreciente es singular.

15. Podemos describir una f.d. F por su derivada o densidad $f = F'$ siempre que f exista y F sea la integral de f:

$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\, dt$$

Muestre que si X tiene f.d. con densidad f y g es creciente y diferenciable, la f.d. de $g(X)$ tiene densidad

$$\frac{f(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$$

16. La distancia de Lévy $d(F, G)$ entre dos funciones de distribución se define como

$$d(F, G) = \text{ínf}\{\varepsilon : G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x\}$$

Dibuje un gráfico e interprete esta distancia geométricamente. Demuestre que d es una distancia sobre el espacio de las funciones de distribución.

17. Si X tiene f.d. F ¿Cuál es la f.d. de X^2?

18. Demuestre que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n+1} \Big[2^{n-1}x + \frac{1}{2}\Big], \quad 0 \leq x \leq 1,$$

donde $[z]$ denota la parte entera de z, es una f.d. discreta cuyos saltos ocurren en puntos de la forma $r2^{-s}$, donde r y s son enteros.