Medida y Probabilidad
Problemas IV

Los problemas 3, 9, 10, 12 y 14 son para entregar el lunes 7/09/09.

1. Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son dos semiálgebras de eventos de Ω, demuestre que la clase $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{A_1 \cap A_2 : A_i \in \mathcal{S}_i, i = 1, 2\}$ es también una semiálgebra de subconjuntos de Ω. Además, el álgebra (resp. σ-álgebra) generada por $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ es idéntica con la generada por $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

2. Decimos que dos conjuntos A y $B \in \mathcal{B}$ son equivalentes si $P(A \triangle B) = 0$. Para un conjunto A definimos la clase de equivalencia $A^{\#} = \{B \in \mathcal{B} : P(A \triangle B) = 0\}$. Esto descompone a $\mathcal{B}$ en clases de equivalencia. Para cada clase definimos $P^{\#}(A^{\#}) = P(A)$, para todo $A \in A^{\#}$. En la práctica identificamos las clases de equivalencia con los miembros y no escribimos los $\#$.

   Un *átomo* en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ se define como (la clase de equivalencia de) un conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $P(A) > 0$, y si $B \subset A$, $B \in \mathcal{B}$, entonces $P(B) = 0$ ó $P(A \setminus B) = 0$. El espacio de probabilidad es *no-atómico* si no tiene átomos, es decir, si $A \in \mathcal{B}$ y $P(A) > 0$ implican que existe $B \subset A$ tal que $0 < P(B) < P(A)$.

   a) Si $\Omega = \mathbb{R}$ y P está determinada por una función de distribución $F(x)$, demuestre que los átomos son $\{x : F(x) - F(x-) > 0\}$.

   b) Si $(\Omega, \mathcal{B}, P) = ((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue, demuestre que el espacio de probabilidad es no-atómico.

   c) Demuestre que dos átomos distintos tienen intersección vacía. (Dos conjuntos son distintos si $P(A \triangle B) = 0$. Hay que probar que $P((A \cap B) \triangle \emptyset) = 0$).

   d) Un espacio de probabilidad contiene a lo sumo una cantidad numerable de átomos.

   e) Si un espacio de probabilidad no contiene átomos, entonces para cada $a \in (0, 1]$ existe al menos un conjunto $A \in \mathcal{B}$ para el cual $P(A) = a$.

   f) Sobre el conjunto de clases de equivalencia definimos $d(A^{\#}, B^{\#}) = P(A \triangle B)$, donde $A \in A^{\#}$, $B \in B^{\#}$. Demuestre que d es una métrica sobre el conjunto de clases de equivalencia. verifique que
   $$|P(A) - P(B)| \leq P(A \triangle B)$$
   de modo que $P^{\#}$ es uniformemente continua en el conjunto de clases de equivalencia. Demuestre que P es σ-aditiva si y sólo si para cualquier sucesión de conjuntos $A_n \in \mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \emptyset$ se tiene que $d(A_n^{\#}, \emptyset^{\#}) \to 0$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que la clase de todos los conjuntos $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < \infty$ es un anillo.

4. Sea μ una medida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$ y $\overline{\mu}$ en $\overline{\mathcal{F}}$ es su completación. Demuestre que si $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \subset E \subset B$, $\mu(B - A) = 0$ entonces $E \in \overline{\mathcal{F}}$ y $\overline{\mu}(E) = \mu(A) = \mu(B)$. ¿Qué ocurre si $\mu(A) = \infty$?

5. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra generada por el álgebra $\mathcal{A}$ y sean μ, ν dos medidas σ-finitas en $\mathcal{A}$. Demuestre que si tanto $\mu(E)$ como $\nu(E)$ son finitas, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E_0 \in \mathcal{A}$ tal que
   $$\mu(E \triangle E_0) < \varepsilon, \qquad \nu(E \triangle E_0) < \varepsilon.$$

6. Una colección de conjuntos $\mathcal{D}$ es un σ-anillo si es un anillo y cualquier unión numerable de conjuntos en $\mathcal{D}$ está en $\mathcal{D}$. Demuestre que si $\mathcal{D}$ es un σ-anillo de subconjuntos de Ω, entonces $\mathcal{D} \cup \{\Omega - A : A \in \mathcal{D}\}$ es una σ-álgebra. Si $\Omega \notin \mathcal{D}$, de modo que $\mathcal{D}$ no es una σ-álgebra, y μ es una función positiva y σ-aditiva en $\mathcal{D}$, demuestre que si hacemos $\mu(\Omega - A) = \infty$ para todo conjunto $A \in \mathcal{D}$ hace que μ sea una medida.

7. Si μ es una medida finita demuestre que no puede haber una cantidad no-numerable de conjuntos disjuntos A tales que $\mu(A) > 0$.

8. Demuestre que el conjunto de puntos en $[0, 1]$ cuyo desarrollo binario tiene cero en todos los lugares pares es un conjunto medible de medida 0. ¿Es este conjunto de Borel?

9. Demuestre que cualquier conjunto acotado en $\mathbb{R}^k$ tiene medida exterior de Lebesgue finita. ¿Es el recíproco cierto?

10. Sean $A_n,\ n \geq 1$ conjuntos de Borel en el espacio de Lebesgue $([0,1], \mathcal{F}, \lambda)$. Demuestre que si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda(A_n) > \varepsilon$ para todo n, entonces existe al menos un punto que pertenece a infinitos conjuntos A_n.

11. Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de Ω y suponga que $B \subset \Omega$ satisface $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Demuestre que existe una colección numerable $\mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}$ tal que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)$. (Ayuda: Defina $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega : \exists \mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}$ numerable tal que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)\}$. Demuestre que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

12. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y sea $Q : \mathcal{F} \to [0,1]$ una función que es aditiva en $\mathcal{F}$, $0 \leq Q(A) \leq 1$ para cualquier $A \in \mathcal{F}$ y $Q(\Omega) = 1$ y satisface que si $A_i \in \mathcal{F}$ son disjuntos y $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ entonces $\sum_{i\geq 1} Q(A_i) = 1$. Demuestre que Q es una medida de probabilidad, es decir, demuestre que Q es σ-aditiva.

13. Sea A, B, C eventos disjuntos en un espacio de probabilidad con $P(A) = 0{,}6,\ P(B) = 0{,}3,\ P(C) = 0{,}1$. Calcule las probabilidades de todos los eventos de $\sigma(A, B, C)$.

14. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$$

y sea P la probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

a) $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ c) $C = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ d) $D = [0, 2)$ e) $E = (3, \infty)$.

15. sea F la función dada por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[\frac{1}{i},\infty)}.$$

Demuestre que F es una función de distribución en $\mathbb{R}$. Sea P la medida de probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos

a) $A = [1, \infty)$ b) $B = (\frac{1}{10}, \infty)$ c) $C = \{0\}$ d) $D = [0, \frac{1}{2})$ e) $E = (-\infty, 0)$ f) $F = (0, \infty)$.

16. Sea F una función de distribución. Demuestre que F tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades. Si F es continua demuestre que F es uniformemente continua.

17. Sea F una f.d. con saltos en los puntos $\{a_i\}$. Demuestre que la suma

$$\sum_{x-\varepsilon<a_i<x} [F(a_i) - F(a_i^-)]$$

converge a cera cuando $\varepsilon \downarrow 0$, para todo x. ¿Qué sucede si la suma anterior se extiende al rango $x - \varepsilon < a_i \leq x$?

18. Sea f una función creciente tal que existen dos números reales A y B tales que para todo x, $A \leq f(x) \leq B$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ el número de saltos de tamaño mayor que ε es, a lo sumo, $(B_A)/\varepsilon$. Usando esto demuestre que el número de saltos de cualquier función creciente es a lo sumo numerable.

19. Suponga que μ es una medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que es finita para conjuntos acotados y es invariante bajo traslaciones: $\mu(A + x) = \mu(A)$. Demuestre que $\mu(A) = \alpha m(A)$ para algún $\alpha \geq 0$ y m la medida de Lebesgue.

20. Decimos que un punto x pertenece al soporte de la f.d. F si para todo $\varepsilon > 0$ tenemos $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$. El conjunto de todos estos puntos se conoce como el *soporte* de F. Demuestre que todo punto de salto pertenece al soporte de y que todo punto aislado del soporte es un punto de salto. Dé un ejemplo de una f.d. discreta cuya soporte sea toda la recta.

21. Sea $P(A) = \int_A f(x)dx$ para una función $f \geq 0$ con $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Sea $A = \{x_0\}$, demuestre que A es un conjunto de Borel y que $P(A) = 0$.

22. Sea P como en el ejercicio 19. Sea B un conjunto numerable. Demuestre que B es un conjunto nulo para P. Sea A otro evento con $P(A) = 1/2$. Demuestre que $P(A \cup B) = 1/2$.