Medida
Problemas X
Los problemas 7, 9, 13, 14, y 20 son para entregar el martes 20/11/07.

1. Suponga que $(A_n)_{n\geq 1}$ son eventos independientes que satisfacen $P(A_n) < 1$ para todo n. Demuestre que
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \qquad \text{sii} \qquad P(A_n\ i.v.) = 1$$
Dé un ejemplo que demuestre que la condición $P(A_n) < 1$ es necesaria.
2. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.i. Demuestre que $P(\sup_n X_n < \infty) = 1$ sí y sólo sí $\sum_n P(X_n > M) < \infty$ para algún M.
3. Sea $X_n, n \geq 1$ v.a.i. de Bernoulli con $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 17 éxitos seguidos infinitas veces?
4. Si $P(A_n) \geq \varepsilon > 0$ para todo n grande entonces $P(A_n\ i.v.) \geq \varepsilon$.
5. Sean X, Y v.a.i. y suponga que $P(X + Y = \alpha) = 1$, donde α es una constante. Demuestre que tanto X como Y son constantes.
6. Use el lema de Borel-Cantelli para demostrar que dada cualquier sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\geq 1}$ cuyo rango de valores sea la recta real, existen constantes $c_n \to \infty$ tales que
$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{c_n} = 0) = 1.$$
Dé una descripción detallada de cómo se escogen las constantes c_n.
7. Sea $X_n, n \geq 1$ v.a.i. de Bernoulli con $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ y sea A_n el evento que ocurre si hay n éxitos seguidos entre el ensayo 2^n y el ensayo 2^{n+1}. Si $p \geq 1/2$ demuestre que c. p. 1 ocurren infinitos A_n y si $p < 1/2$ ocurren infinitos A_n con probabilidad 0.
8. Vimos como consecuencia del lema de Borel-Cantelli que la probabilidad de convergencia de una sucesión de variables aleatorias independientes es igual a 0 ó 1. Si la sucesión (X_n) es i.i.d. y no es constante con probabilidad 1, demuestre que la probabilidad de que la sucesión converja es 0.
9. Use el teorema de Rényi para demostrar que si $X_n, n \geq 1$ son i.i.d. con distribución común continua entonces con probabilidad 1 hay infinitos records.
10. Sea n un número primo mayor que 2 y sean X, Y independientes con distribución uniforme en $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Para cada r, $0 \leq r \leq n-1$ definimos $Z_r = X + xY (\mod n)$.
    (a) Demuestre que las v.a.'s $\{Z_r : 0 \leq r \leq n-1\}$ son independientes a pares.
    (b) ¿Es cierto el resultado si no suponemos que n es primo?
11. Sea $X_n, n \geq 1$, v.a.i. con $P(X_n = +1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Sea $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Demuestre que $Z_n, n \geq 1$ son independientes.
12. (Barndorff-Nielsen) Suponga que (E_n) es una sucesión de eventos tales que
$$\lim_n P(E_n) = 0, \quad \sum_n P(E_n \cap E_{n+1}^c) < \infty.$$
Demuestre que $P(E_n i.v.) = 0$. Ayuda: Desconponga $\cup_{j=n}^m E_j$ para $m > n$.
13. (a) Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a.i.i.d. y sea a_n una sucesión de constantes. Demuestre que
$$P([X_n > a_n]\ i.v.) = \begin{cases} 0, & \text{sii} \sum_n P(X_1 > a_n) < \infty \\ 1, & \text{sii} \sum_n P(X_1 > a_n) = \infty \end{cases}$$

(b) Suponga que las X_n son i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que con probabilidad 1

$$\limsup \frac{|X_n|}{\sqrt{2\log n}} = 1.$$

Ayuda: Puede usar la relación de Mill: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(X_n > x)}{\varphi(x)/x} = 1$ donde $\varphi(x)$ es la densidad normal estándar.

(c) Suponga que $X_n, n \geq 1$, son i.i.d. de Poisson con parámetro λ. Demuestre que

$$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \leq P(X_1 \geq n) \leq \frac{\lambda^n}{n},$$

y por lo tanto, con probabilidad 1,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n/\log(\log n)} = 1.$$

14. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ dos sub-σ-álgebras en Ω. Suponga que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son independientes y la variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible respecto a ambas σ-álgebras. Demuestre que X es constante, es decir, $P(X = c) = 1$ para alguna constante c.

15. Sea X, Y v.a.i. con distribuciones geométricas de parámetros λ y μ, respectivamente. Sea $Z = \min(X, Y)$. Demuestre que Z tiene distribución geométrica y halle su parámetro. (X tiene distribución geométrica con parámetro $\alpha \in [0, 1)$ si $P(X = n) = (1-\alpha)\alpha^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$).

16. Sean X, Y v.a.i.i.d. que toman valores 1 y -1 con probabilidades respectivas 1/2. Sea $Z = XY$, demuestre que X, Y, Z son independientes a pares pero no son independientes.

17. Sea $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ v.a.i. con f.d. $\{F_j, 1 \leq j \leq n\}$. Halle la f.d. de $\max_j X_j$ y de $\min_j X_j$.

18. Si para cada $n \geq 1$ las clases de conjuntos $\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{D}$ son independientes, demuestre que $\cup_{n\geq 1}\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{D}$ también lo son.

19. Si X e Y son independientes y $X + Y$ es degenerada, entonces tanto X como Y son degeneradas (Una variable aleatoria es degenerada si es constante con probabilidad 1).

20. Demuestre:

    (i) Cualquier variable aleatoria es independiente de una variable degenerada.

    (ii) Dos eventos disjuntos son independientes si y sólo si uno de ellos tiene probabilidad cero.

    (iii) Si $P(X = \pm 1,\ Y = \pm 1) = 1/4$ para cualquiera de los cuatro pares de signos, entonces X e Y son independientes.