Modelos Estocásticos I

Lista de Problemas 14

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas separadas el lunes 14/11/16

1. Las llegadas de pasajeros a una parada de autobús siguen un proceso de Poisson $N(t)$ con tasa $\lambda = 2$ por unidad de tiempo. Suponga que el autobús salió en el instante $t = 0$ y no quedaron pasajeros en la parada. Sea T el instante en el que llega el siguiente autobús. El número de pasajeros presentes cuando el autobús llega es $N(T)$. Suponga que el tiempo de llegada T del autobús es independiente del proceso de Poisson y tiene densidad uniforme:
$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
(a) Determine los momentos condicionales $\mathrm{E}[N(T)|T = t]$ y $\mathrm{E}[(N(T))^2|T = t]$. (b) Determine la media $\mathrm{E}(N(T))$ y varianza $\mathrm{Var}(N(T))$.

2. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro λ. (a) Demuestre que $\{\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2\}$ si y sólo si $\{N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) = 0 \text{ ó } 1\}$. Use esta relación para obtener
$$P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = P(N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) = 0 \text{ ó } 1) = e^{-\lambda t_1}[1 + \lambda(t_2 - t_1)]e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$
Derivando, obtenga la densidad conjunta $f(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda t_2}$ para $0 < t_1 < t_2$. (b) Determine la densidad condicional para τ_1 dado que $\tau_2 = t_2$. (c) Determine las densidades marginales de τ_1 y τ_2. (d) Haciendo un cambio de variables determine la distribución conjunta para $T_1 = \tau_1$ y $T_2 = \tau_2 - \tau_1$.

3. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 4$ por hora. Si la tienda abre a las 10:00 am, (a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos cliente hayan llegado antes de las 10:30? (b) Dado que (a) es cierto ¿cuál es la probabilidad de que un total de 7 clientes haya llegado antes de las 12:30? (c) Dado que (a) y (b) son ciertos ¿cuál es la probabilidad de que un total de 12 clientes hayan llegado durante el día, si la tienda cierra a las 6:00 pm?

4. Un profesor de matemáticas espera el autobús a Guanajuato en la parada que está frente a la iglesia de Valenciana. El tiempo de espera hasta el próximo autobús tiene distribución uniforme en $(0, 1)$ horas. Personal del Cimat pasa en carro por la parada con una frecuencia de 6 por hora según un proceso de Poisson y la probabilidad de que cada uno de ellos lleve al profesor a Guanajuato es de $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que termine bajando en el autobús?

5. Para $i = 1, \dots, n$ sean $(N_i(t),\ t \geq 0)$ procesos de Poisson independientes con parámetro común λ. Halle la distribución del primer instante para el cual al menos un evento ha ocurrido en cada uno de los procesos.

6. Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Definimos una nueva variable aleatoria N de la siguiente manera: Si $X_1 > 1$ entonces $N = 0$; si $X_1 \leq 1$ pero $X_1 + X_2 > 1$, entonces $N = 1$; en general, $N = k$ si
$$X_1 + \cdots + X_k \leq 1 < X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1}.$$
Demuestre que N tiene distribución de Poisson de parámetro λ. Este método puede ser usado para simular la distribución de Poisson. (Ayuda: $X_1 + \cdots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$. Condicione por el valor de la suma y use la ley de probabilidad total para mostrar que
$$P(N = k) = \int_0^1 [1 - F(1 - x)] f_k(x) dx,$$
donde $F(x)$ es la función de distribución exponencial y f_k es la densidad $\Gamma(k, \lambda)$).

7. El número de fallas $N(t)$ que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo $[0, t)$ es un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a $\lambda = 0.25h^{-1}$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en $[0, 8)$, al menos dos fallas en $[8, 16)$ y a lo sumo una falla en $[16, 24)$ (la unidad de tiempo es 1 hora).

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?

8. Sean $(N(t),\ t \geq 0)$ y $(M(t),\ t \geq 0)$ procesos de Poisson independientes de parámetros λ y μ. Para un entero fijo a, sea $T_a = \text{mín}\{t \geq 0 : M(t) = a\}$ el instante aleatorio en el cual el proceso M alcanza a por primera vez. Obtenga $P(N(T_a)) = k)$, para $k = 0, 1, \ldots$. (Ayuda: Considere inicialmente $\xi = N(T_1)$ que corresponde a $a = 1$, entonces ξ tiene distribución geométrica. Luego demuestre que para a cualquiera, $N(T_a)$ tiene la misma distribución que una suma de a variables independientes con la distribución de ξ, es decir, tiene una distribución binomial negativa).

9. El tráfico en una cierta carretera se distribuye de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $2/3$ de vehículo por minuto. 10 % de los vehículos son camiones y el resto son autos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un camión pase en una hora? (b) Dado que 10 camiones han pasado en una hora, ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que han pasado? (c) Dado que 50 vehículos han pasado en una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 5 camiones y 45 autos?

10. En una oficina de correo los paquetes llegan según un proceso de Poisson de intensidad λ. Hay un costo de almacenamiento de c pesos por paquete y por unidad de tiempo. Los paquetes se acumulan en el local y se despachan en grupos cada T unidades de tiempo (es decir, se despachan en T, $2T$, $3T, \ldots$). Hay un costo por despacho fijo de K pesos (es decir, el costo es independiente del número de paquetes que se despachen). (a) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento en el primer ciclo $[0, T]$? (b) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento y despacho en el primer ciclo? (c) ¿Cuál es el valor de T que minimiza este costo promedio?

11. Dos correctores de prueba leen un manuscrito de 300 páginas. El primero encuentra 100 errores, y el segundo 120, y sus listas contienen 80 errores en común. Suponga que los errores del autor siguen un proceso de Poisson con tasa desconocida λ por página mientras que los correctores de prueba tienen probabilidad de éxito p_1 y p_2 de encontrar los errores. Sea X_0 el número de errores que ninguno encontró. Sean X_1 y X_2 el número de errores que sólo encontró 1 o sólo encontró 2, respectivamente, y sea X_3 el número de errores que ambos encontraron. (a) Encuentre la distribución conjunta de (X_0, X_1, X_2, X_3). (b) Use la respuesta anterior para encontrar estimadores de p_1 y p_2 y luego del número de errores no descubiertos.

12. Un foco tiene un tiempo de vida exponencial con media de 200 días. Cuando se quema es reemplazado de inmediato. Además hay un sistema de mantenimiento preventivo por el cual el foco es reemplazado de acuerdo a los tiempos de un proceso de Poisson de intensidad 0.1. (a) ¿Con qué frecuencia se reemplaza el foco? (b) A largo plazo ¿Qué proporción de los cambios de foco se deben a fallas?