Modelos Estocásticos I

Respuestas a los problemas de la tarea 1

7. Sean A, B y C eventos con probabilidad estrictamente positiva. Demuestre las siguientes relaciones

   (a) $P[A^c \cup B^c] = 1 - P[B]P[A|B]$

   (b) $P[A \cap B | B \cup C] = P[A \cap B|B]P[B|B \cup C]$

   (c) $P[A|B]P[B|C]P[C|A] = P[B|A]P[C|B]P[A|C]$

   (d) $\frac{P[A|A\cup B]}{P[B|A\cup B]} = \frac{P[A]}{P[B]}$

   Solución

   Gracias al hecho de que A, B y C son eventos de probabilidad estrictamente positiva, se puede verificar fácilmente que todas las probabilidades condicionales y los cocientes de probabilidades que se mostrarán en los siguientes cálculos están bien definidos.

   (a) $P[A^c \cup B^c] = P[(A \cap B)^c] = 1 - P[A \cap B] = 1 - P[B]P[A|B]$.

   (b) Utilizando las igualdades de conjuntos $(A \cap B) \cap (B \cup C) = A \cap B$ y $B \cap (B \cup C) = B$, se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
P[A \cap B \mid B \cup C] &= \frac{P[A \cap B \cap (B \cup C)]}{P[B \cup C]} = \frac{P[A \cap B]}{P[B \cup C]} \cdot \frac{P[B]}{P[B]} = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \cdot \frac{P[B]}{P[B \cup C]} \\
&= \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \cdot \frac{P[B \cap (B \cup C)]}{P[B \cup C]} = P[A \cap B|B]P[B|B \cup C]
\end{aligned}
$$

   (c) $P[B \cap C|A] = \dfrac{P[B \cap C \cap A]}{P[A]} = \dfrac{P[B \cap A \cap C]}{P[A \cap C]} \dfrac{P[A \cap C]}{P[A]} = P[C|A]P[B|A \cap C]$

   (d) Utilizando las igualdades de conjuntos $A \cap (A \cup B) = A$ y $B \cap (A \cup B) = B$, se tiene lo siguiente

$$
\frac{P[A|A \cup B]}{P(B|A \cup B)} = \left(\frac{P[A \cap (A \cup B)}{P[A \cup B]} \right) / \left(\frac{P[B \cap (A \cup B)}{P[A \cup B]} \right) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P[B \cap (A \cup B)]} = \frac{P[A]}{P[B]}
$$

9 Tres sucursales de una tienda tienen 8, 12, y 14 empleados de los cuales 4, 7 y 10 son mujeres, respectivamente. a) Se escoge una sucursal al azar y de ella se escoge un empleado. Si éste es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que ella trabaje en la sucursal con 12 empleados? b) Si se escoge un segundo empleado de la misma sucursal, ¿cuál es la probabilidad de que se escoja una mujer?

   Solución Llamemos A, B y C a las sucursales con 8, 12 y 14 empleados respectivamente. También, denotemos por M al evento " el empleado escogido es mujer". Entonces, por el teorema de Bayes

   (a)

$$
\begin{aligned}
P(B|M) &= \frac{P(M|B)P(B)}{P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C)} \\
&= \frac{(7/12)(1/3)}{(1/2)(1/3) + (7/12)(1/3) + (5/7)(1/3)} \\
&= \frac{49}{151}
\end{aligned}
$$

(b) Para esta parte, denotemos por D, E, F y N a los eventos,

$$\begin{aligned}
N &= \{ \text{ Se escoge una segunda mujer de la misma sucursal que la primera elección } \}\\
D &= \{ \text{ La primera mujer escogida trabaja en la sucursal } A\}\\
E &= \{ \text{ La primera mujer escogida trabaja en la sucursal } B\}\\
F &= \{ \text{ La primera mujer escogida trabaja en la sucursal } C\}
\end{aligned}$$

Queremos calcular $P(N)$, usando probabilidad total, tenemos

$$P(N) = P(N|D)P(D) + P(N|E)P(E) + P(N|F)P(F),$$

donde

$$P(N|D) = \frac{3}{7}, \quad P(N|E) = \frac{6}{11} \text{ y } P(N|F) = \frac{9}{13}.$$

Para calcular las probabilidades $P(D)$, $P(E)$ y $P(F)$ se hacen cálculos análogos a los del inciso anterior, es decir, usando teorema de Bayes. Tenemos

$$P(D) = P(A|M) = \frac{42}{151} \qquad P(E) = P(B|M) = \frac{49}{151} \qquad P(F) = P(C|M) = \frac{60}{151}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
P(N) &= P(N|D)P(D) + P(N|E)P(E) + P(N|F)P(F)\\
&= \frac{3}{7} \times \frac{42}{151} + \frac{6}{11} \times \frac{49}{151} + \frac{9}{13} \times \frac{60}{151}\\
&= \frac{18 \cdot 11 \cdot 13 + 6 \cdot 13 \cdot 49 + 9 \cdot 11 \cdot 60}{151 \cdot 11 \cdot 13}\\
&= \frac{12336}{21593} \approx 0.571
\end{aligned}$$