

# Modelos Estocásticos I

## Problemas 13

1. Considere un banco que tiene dos cajeros. Tres personas, Arsenio, Bernardo y Cristóbal, entran a la agencia casi al mismo tiempo y en ese orden. Arsenio y Bernardo pasan directamente a las cajas mientras que Cristóbal espera hasta que se desocupe algún cajero. Suponga que los tiempos de servicio para cada cliente tienen distribución exponencial con media 4 minutos, (a) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo total que tarda Cristóbal en el banco? (b) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo total hasta que sale el último de los tres clientes? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que Cristóbal sea el último en salir? (d) Responda las tres preguntas anteriores para una distribución exponencial general con parámetro  $\lambda$ .
2. Sea  $N$  un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda > 0$ . (a) Determine la correlación entre las variables  $N(t)$  y  $N(t+s)$ . (b) Halle la covarianza entre dos incrementos del proceso  $N(t) - N(s)$  y  $N(t') - N(s')$ .
3. Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots$  v.a.i.i.d. que toman valores en  $\mathbb{Z}$  y sea  $P(\xi_1 = i) = p(i), i \in \mathbb{Z}$ . Sea  $A \subset \mathbb{Z}$  tal que  $P(\xi_1 \in A) > 0$  y sea  $T_A = \min\{n \geq 1 : \xi_n \in A\}$ . Demuestre que  $P(\xi_{T_A} = i) = p(i) / \sum_{a \in A} p(a), i \in A$ .
4. Demuestre que para una cadena de Markov irreducible con  $n$  estados es posible ir de cualquier estado  $i$  a cualquier otro estado  $j$  en  $n - 1$  pasos o menos.
5. Construimos una cadena de Markov de la siguiente manera: Si estamos en el estado  $k, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , lanzamos un dado  $k$  veces, vemos al mayor valor obtenido y la cadena se mueve a ese estado. (a) Halle las probabilidades de transición y escriba la matriz de transición correspondiente. (b) ¿Es aperiódica esta cadena?. (c) ¿Tiene una única distribución estacionaria? (d) ¿Puedes hallar el estado más visitado en promedio?
6. Sea  $X_n$  una cadena de Markov irreducible y aperiódica con matriz de transición  $P$  y sea  $\pi$  su distribución estacionaria. Suponga que la distribución inicial de la cadena es  $\pi: P(X_0 = i) = \pi(i)$  para todo  $i \in \mathcal{E}$ . (a) Fijamos  $N$  y sea  $X_0^* = X_N, X_1^* = X_{N-1}, \dots$ . Demuestre que este es un proceso de Markov. (b) Sea  $P^*$  la matriz de transición de  $X_j^*$ . Halle las entradas  $P_{ij}^*$ . (c) Demuestre que  $P$  y  $P^*$  tienen la misma distribución estacionaria.
7. Suponga que el tiempo necesario para reparar una máquina tiene distribución exponencial de media 2. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la reparación tarde más de dos horas? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 1 y 3 horas? ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 5 horas si sabemos que tarda más de 3 horas? (d) ¿Cuál es la varianza del tiempo de reparación?
8. Amaranta y Berta entran a un salón de belleza simultáneamente, Amaranta a cortarse el pelo y Berta a teñírselo. Suponga que el tiempo para un corte tiene distribución exponencial con media 30 minutos mientras que para un teñido es exponencial con media 40 minutos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que Amaranta termine primero? (b) ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que ambas terminen?
9. Sean  $S$  y  $T$  variables independientes con distribución exponencial con parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ . Sea  $U = \min\{S, T\}$  y  $V = \max\{S, T\}$ . Halle (a)  $E(U)$ , (b)  $E(V - U)$ , (c)  $E(V)$ , (d) Use la identidad  $V = S + T - U$  para obtener una fórmula distinta para  $E(V)$ .
10. Una linterna necesita dos baterías para funcionar. Inicialmente se tienen cuatro baterías numeradas del 1 al 4 y se colocan en la linterna las baterías 1 y 2. Cuando una batería falla se reemplaza por la batería con menor número que tenga carga. Suponga que la vida de las baterías es exponencial con media 100 horas. Sea  $T$  el instante en el cual sólo queda una batería con carga y sea  $N$  el número de la batería que todavía tiene carga. (a) Halle  $E(T)$ , (b) Halle la distribución de  $N$ .
11. Los clientes entran a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda = 2$ . Sea  $N(t)$  el número de clientes que han entrado hasta el instante  $t$ . Calcule las siguientes probabilidades: (a)  $P(N(1) = 2)$ , (b)  $P(N(1) = 2, N(3) = 6)$ , (c)  $P(N(1) = 2 | N(3) = 6)$ , (d)  $P(N(3) = 6 | N(1) = 2)$ , (e)  $P(N(1) \leq 2)$ , (f)  $P(N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1)$ .
12. Sea  $N(t)$  un proceso de Poisson de parámetro 3. Sea  $\tau_n$  en instante en el que ocurre el  $n$ -ésimo evento. Calcule (a)  $E(\tau_{12})$ , (b)  $E(\tau_{12} | N(2) = 5)$ , (c)  $E(N(5) | N(2) = 5)$ .
13. Para analizar estadísticamente el bombardeo de Londres durante la segunda guerra mundial, se dividió el área de la ciudad en 576 sectores, cada uno con un área de  $0.25 \text{ km}^2$ , y se contó el número de bombas que cayó en cada uno. La tabla que presentamos a continuación muestra el número de sectores en los cuales cayeron exactamente  $k$  bombas.

$k$	0	1	2	3	4	$\geq 5$
N° de sectores	229	211	93	35	7	1

Ajuste una distribución de Poisson a estos datos y con ella calcule las frecuencias esperadas de 0, 1, ..., 5 bombas en 576 sectores.

14. Se observa una sustancia radioactiva durante 4 intervalos de 6 segundos cada uno. Si la frecuencia de las emisiones de partículas es de 0.5 por segundo, calcular la probabilidad de que (a) En cada intervalo se emitan 3 o más partículas, (b) En al menos un intervalo se emitan 3 o más partículas.
15. Un recipiente con colonias de bacteria visibles al microscopio como puntos oscuros se divide en cuadrados pequeños y se cuenta el número de colonias presentes en cada cuadrado. En las tablas siguientes presentamos el número observado de cuadrados con exactamente  $k$  puntos oscuros en dos experimentos realizados con diferentes tipos de bacterias. Explique por qué un proceso de Poisson es un modelo adecuado en este caso y compare la predicción de dicho modelo con los resultados observados en la práctica.

Caso 1:

$k$	0	1	2	3	4	5	$\geq 6$
$N_k$	5	19	26	26	21	13	8

Caso 2:

$k$	0	1	2	3	4	$\geq 5$
$N_k$	8	16	18	15	9	7

16. Sean  $X_1, X_2, \dots$  v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Definimos una nueva variable aleatoria  $N$  de la siguiente manera: Si  $X_1 > 1$  entonces  $N = 0$ ; si  $X_1 \leq 1$  pero  $X_1 + X_2 > 1$ , entonces  $N = 1$ ; en general,  $N = k$  si

$$X_1 + \dots + X_k \leq 1 < X_1 + \dots + X_k + X_{k+1}.$$

Demuestre que  $N$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ . Este método puede ser usado para simular la distribución de Poisson. (Ayuda:  $X_1 + \dots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ ). Condicione por el valor de la suma y use la ley de probabilidad total para mostrar que

$$P(N = k) = \int_0^1 [1 - F(1 - x)] f_k(x) dx,$$

donde  $F(x)$  es la función de distribución exponencial y  $f_k$  es la densidad  $\Gamma(k, \lambda)$ .

17. El número de fallas  $N(t)$  que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo  $[0, t)$  es un proceso de Poisson  $\{N(t), t \geq 0\}$ . En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a  $\lambda = 0.25h^{-1}$ . ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en  $[0, 8)$ , al menos dos fallas en  $[8, 16)$  y a lo sumo una falla en  $[16, 24)$  (la unidad de tiempo es 1 hora). (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?
18. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda = 4$  por hora. Si la tienda abre a las 10 : 00 *am*, (a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente un cliente haya llegado antes de las 10 : 30? (b) Dado que (a) es cierto ¿cuál es la probabilidad de que un total de 5 clientes haya llegado antes de las 12:30? (c) Dado que (a) y (b) son ciertos ¿cuál es la probabilidad de que un total de 10 clientes hayan llegado durante el día, si la tienda cierra a las 6 : 00 *pm*?
19. Sea  $N(t)$  un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ . (a) Demuestre que  $\{\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2\}$  sí y sólo sí  $\{N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) = 0 \text{ ó } 1\}$ . Use esta relación para obtener

$$P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = P(N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) = 0 \text{ ó } 1) = e^{-\lambda t_1} [1 + \lambda(t_2 - t_1)] e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Derivando, obtenga la densidad conjunta  $f(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda t_2}$  para  $0 < t_1 < t_2$ . (b) Determine la densidad condicional para  $\tau_1$  dado que  $\tau_2 = t_2$ . (c) Determine las densidades marginales de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . (d) Haciendo un cambio de variables determine la distribución conjunta para  $T_1 = \tau_1$  y  $T_2 = \tau_2 - \tau_1$ .

20. Un profesor de matemáticas espera el autobús a Guanajuato en la parada que está frente a la iglesia de Valenciana. El tiempo de espera hasta el próximo autobús tiene distribución uniforme en  $(0, 1)$  horas. Personal del Cimat pasa en carro por la parada con una frecuencia de 6 por hora según un proceso de Poisson y la probabilidad de que cada uno de ellos lleve al profesor a Guanajuato es de  $1/3$ . ¿Cuál es la probabilidad de que termine bajando en el autobús?
21. Las llegadas de pasajeros a una parada de autobús siguen un proceso de Poisson  $N(t)$  con tasa  $\lambda = 2$  por unidad de tiempo. Suponga que el autobús salió en el instante  $t = 0$  y no quedaron pasajeros en la parada. Sea  $T$  el instante en el que llega el siguiente autobús. El número de pasajeros presentes cuando el autobús llega es  $N(T)$ . Suponga que el tiempo de llegada  $T$  del autobús es independiente del proceso de Poisson y tiene densidad uniforme

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) Determine los momentos condicionales  $E[N(T)|T = t]$  y  $E[(N(T))^2|T = t]$ .  
 (b) Determine la media  $E(N(T))$  y varianza  $\text{Var}(N(T))$ .

22. Para  $i = 1, \dots, n$  sean  $(N_i(t), t \geq 0)$  procesos de Poisson independientes con parámetro común  $\lambda$ . Halle la distribución del primer instante para el cual al menos un evento ha ocurrido en cada uno de los procesos.
23. Sean  $(N(t), t \geq 0)$  y  $(M(t), t \geq 0)$  procesos de Poisson independientes de parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ . Para un entero fijo  $a$ , sea  $T_a = \min\{t \geq 0 : M(t) = a\}$  el instante aleatorio en el cual el proceso  $M$  alcanza  $a$  por primera vez. Obtenga  $P(N(T_a) = k)$ , para  $k = 0, 1, \dots$  (Ayuda: Considere inicialmente  $\xi = N(T_1)$  que corresponde a  $a = 1$ , entonces  $\xi$  tiene distribución geométrica. Luego demuestre que para  $a$  cualquiera,  $N(T_a)$  tiene la misma distribución que una suma de  $a$  variables independientes con la distribución de  $\xi$ , es decir, tiene una distribución binomial negativa).
24. El tráfico en una cierta carretera se distribuye de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad  $2/3$  de vehículo por minuto. 10% de los vehículos son camiones y el resto son autos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un camión pase en una hora? (b) Dado que 10 camiones han pasado en una hora, ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que han pasado? (c) Dado que 50 vehículos han pasado en una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 5 camiones y 45 autos?
25. En una oficina de correo los paquetes llegan según un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$ . Hay un costo de almacenamiento de  $c$  pesos por paquete y por unidad de tiempo. Los paquetes se acumulan en el local y se despachan en grupos cada  $T$  unidades de tiempo (es decir, se despachan en  $T, 2T, 3T, \dots$ ). Hay un costo por despacho fijo de  $K$  pesos (es decir, el costo es independiente del número de paquetes que se despachen). (a) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento en el primer ciclo  $[0, T]$ ? (b) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento y despacho en el primer ciclo? (c) ¿Cuál es el valor de  $T$  que minimiza este costo promedio?
26. Dos correctores de prueba leen un manuscrito de 300 páginas. El primero encuentra 100 errores, y el segundo 120, y sus listas contienen 80 errores en común. Suponga que los errores del autor siguen un proceso de Poisson con tasa desconocida  $\lambda$  por página mientras que los correctores de prueba tienen probabilidad de éxito  $p_1$  y  $p_2$  de encontrar los errores. Sea  $X_0$  el número de errores que ninguno encontró. Sean  $X_1$  y  $X_2$  el número de errores que sólo encontró 1 o sólo encontró 2, respectivamente, y sea  $X_3$  el número de errores que ambos encontraron. (a) Encuentre la distribución conjunta de  $(X_0, X_1, X_2, X_3)$ . (b) Use la respuesta anterior para encontrar estimadores de  $p_1$  y  $p_2$  y luego del número de errores no descubiertos.
27. Un foco tiene un tiempo de vida exponencial con media de 200 días. Cuando se quema es reemplazado de inmediato. Además hay un sistema de mantenimiento preventivo por el cual el foco es reemplazado de acuerdo a los tiempos de un proceso de Poisson de intensidad 0.1. (a) ¿Con qué frecuencia se reemplaza el foco? (b) A largo plazo ¿Qué proporción de los cambios de foco se deben a fallas?
28. (Cómo generar variables de Poisson.) Sean  $U_1, U_2, \dots$  v.a.i. con distribución uniforme en  $(0, 1)$ .
- (a) Si  $X_i = (-\log U_i)/\lambda$ , muestre que  $X_i$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .
- (b) Use el resultado anterior para demostrar que si definimos  $N$  como el valor de  $n$  que satisface

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i,$$

entonces  $N$  tiene distribución de Poisson con media  $\lambda$ .

29. Sean  $T_1, T_2, \dots$  v.a.i. exponenciales de parámetro  $\lambda$  y sea  $N$  una variable independiente con  $P(N = n) = p(1 - p)^{n-1}$ . ¿Cuál es la distribución de la suma aleatoria  $T = T_1 + \dots + T_N$ ?
30. Un submarino tiene tres instrumentos de navegación pero sólo puede permanecer en alta mar si al menos dos de ellos están trabajando. Suponga que los tiempos de vida de los instrumentos son exponenciales con medias 1 año, 1.5 años y 3 años. ¿Cuál es el tiempo promedio que el submarino puede permanecer en alta mar?
31. Los clientes llegan a un banco según un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. Dado que dos clientes llegaron en los primeros 5 minutos, (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros dos minutos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya llegado en los primeros dos minutos?