# Modelos Estocásticos I

**Problemas 8**

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 03/10/12

1. (a) Un esquema similar al modelo de Ehrenfest, usado por Daniel Bernoulli y Laplace para estudiar el flujo de líquidos incompresibles entre dos recipientes, es el siguiente. Hay $N$ bolas blancas y $N$ negras en dos cajas, cada una de las cuales contiene $N$ bolas. Se selecciona una bola de cada caja y se coloca en la otra. Halle la matriz de transición para el número de bolas blancas en la primera caja.

   (b) Considere dos cajas, $A$ y $B$, que contienen un total de $N$ bolas. Se selecciona una bola al azar del total de $N$ bolas y luego se selecciona una caja, $A$ con probabilidad $p$ y $B$ con probabilidad $q = 1 - p$ y la bola seleccionada se coloca en esta caja. El estado del sistema está representado por el número de bolas en $A$. Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov.

   (c) Considere dos cajas, $A$ y $B$, que contienen un total de $N$ bolas. Suponga que en el instante $n$ la caja $A$ tiene exactamente $k$ bolas. En el instante $n + 1$ se seleccionan una caja y una bola al azar, proporcionalmente al número de bolas que contiene cada caja, es decir, se selecciona una bola de la caja $A$ con probabilidad $k/N$. Esta bola se coloca en la caja $A$ con probabilidad $k/N$ y en la caja $B$ con probabilidad $(N - k)/N$. Determine la matriz de transición para esta cadena de Markov.

2. Sea $\xi_n,\ n \geq 1$ una sucesión de variables de Bernoulli independientes y simétricas y sea $X_n = (\xi_n + \xi_{n+1})/2$. Halle las probabilidades de transición $P_{i,j}^{(m,n)} = P(X_n = j|X_m = i)$ para $m < n$, $i, j = -1, 0, 1$. Demuestre que $(X_n)$ no es una cadena de Markov.

3. Sea $X_n,\ n \geq 0$ una cadena de Markov y sea $\{n_k, k \geq 0\}$ una sucesión creciente y no acotada de enteros positivos. Demuestre que $Y_k = X_{n_k}$ también es una cadena de Markov, posiblemente no-homogénea. Halle la matriz de transición de $Y$ cuando $n_k = 2k$ y $X$ es el paseo al azar simple.

4. Considere una sucesión infinita de ensayos de Bernoulli independientes y simétricos ($p = q = 0.5$). Sea $A_n$ el número de éxitos al cabo de $n$ lanzamientos y $B_n$ el número de fracasos. Considere $X_n = A_n - B_n$, $Y_n = |A_n - B_n|$. Determine si $X_n, Y_n$ son cadenas de Markov y en caso afirmativo halle sus matrices de transición.

5. Dada cualquier matriz de transición $P$, demuestre que es fácil aumentarla añadiendo nuevos estados que tienen acceso a los estados iniciales, pero es imposible añadir un nuevo estado que se comunique con alguno de los estados iniciales.

6. En la estrategia 'doble o nada' el jugador apuesta todo lo que tiene y tiene probabilidad 0.5 de duplicar su capital o de perderlo todo. Suponga que comienza con 1 peso y decide jugar $n$ juegos o hasta que se arruine. Describa la cadena de Markov y halle su matriz de transición.

7. Sea $X_n,\ n \geq 1$ una cadena de Markov y sea $\tau$ el primer instante para el cual $X_n \neq X_0$, con $\tau = +\infty$ si $X_n = X_0$ para todo $n \geq 0$. Calcule $\mathrm{E}(\tau|X_0 = i)$ en términos de $P_{ii}$.

8. Considere un sistema de inventario en tiempo discreto donde $X_n$ indica el número de objetos en el sistema al inicio del período $n$. Al inicio de cada período, el inventario decrece una unidad si el nivel de inventario es positivo. En caso contrario el inventario permanece a nivel 0 hasta el fin del período. Al final del $n$-ésimo período se surte el inventario una cantidad $V_n$, donde las $V_n$ son v.a.i.i.d. con distribución $p_i = P(V_1 = i),\ i \geq 0$. Bajo estas hipótesis $X_{n+1} = (X_n - 1 + V_n)$ si $X_n > 0$ y $X_{n+1} = V_n$ si $X_n = 0$. Justifique que $X_n$ es una cadena de Markov y halle su matriz de transición.

9. De nuevo, considere un sistema de inventario en tiempo discreto donde $X_n$ indica el número de objetos en el sistema al inicio del período $n$. En cada período se surte una unidad al inventario y éste decrece $U_n$ unidades, si es posible. En este caso el inventario al inicio del período $n + 1$ es $X_{n+1} = (X_n - U_n + 1)^+$. Suponga que las variables $U_n$ son i.i.d. con distribución $p_i = P(U_1 = i)$, $i \geq 0$. Justifique que $X_n$ es una cadena de Markov y halle su matriz de transición.

10. Definimos el instante de la $k$-ésima visita al estado $j$ por

$$T_j^k = \text{mín}\{n > T_j^{k-1} : X_n = j\}$$

para $k \geq 1$ y ponemos $T_j^0 = 0$. Con esta definición $T_j^1$ coincide con $T_j$, como fue definido en clases. Demuestre que para $k \geq 1$, $P_i(T_j^k < \infty) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{k-1}$.

11. Con las definiciones vistas en clase, demuestre que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{n-m},$$

para $n \geq 1$. Demuestre que si $a$ es un estado absorbente, $P_{ia}^n = P_i(T_a \leq n)$, para $n \geq 1$.

12. a) Demuestre que $\rho_{ij} > 0$ si y sólo si $P_{ij}^n > 0$ para algún entero positivo $n$.

    b) Demuestre que si $P_{ij} = 0$ siempre que $i \in C$, $j \notin C$, entonces $C$ es cerrado.

13. Decimos que una v. a. $T$ es un *tiempo de parada* para el proceso $(X_n)_{n\geq 1}$ si, para cada $n$, es posible determinar si el suceso $\{T = n\}$ ocurrió o no observando los valores del proceso hasta el tiempo $n$: $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

    Sea $i$ un estado cualquiera de la cadena. Demuestre que $T_i$, el instante de la primera visita a $i$, es un tiempo de parada pero $\tau_i$, el instante de la última visita a $i$, no lo es.

14. Sea $T$ un tiempo de parada para la cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$. Demuestre la siguiente propiedad (que es una versión de la Propiedad Fuerte de Markov)

$$P(X_{T+1} = j | X_k = i_k \text{ para } 0 \leq k < T, X_T = i) = P(X_{T+1} = j | X_T = i).$$