Modelos Estocásticos I

Problemas 14

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 14/11/12

1. Considere un banco que tiene dos cajeros. Tres personas, Arsenio, Bernardo y Cristóbal, entran a la agencia casi al mismo tiempo y en ese orden. Arsenio y Bernardo pasan directamente a las cajas mientras que Cristóbal espera hasta que se desocupe algún cajero. Suponga que los tiempos de servicio para cada cliente tienen distribución exponencial con media 4 minutos, (a) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo total que tarda Cristóbal en el banco? (b) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo total hasta que sale el último de los tres clientes? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que Cristóbal sea el último en salir? (d) Responda las tres preguntas anteriores para una distribución exponencial general con parámetro λ.

2. Sea N un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. (a) Determine la correlación entre las variables $N(t)$ y $N(t+s)$. (b) Halle la covarianza entre dos incrementos del proceso $N(t) - N(s)$ y $N(t') - N(s')$.

3. Sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a.i.i.d. que toman valores en $\mathbb{Z}$ y sea $P(\xi_1 = i) = p(i), i \in \mathbb{Z}$. Sea $A \subset \mathbb{Z}$ tal que $P(\xi_1 \in A) > 0$ y sea $T_A = \text{mín}\{n \geq 1 : \xi_n \in A\}$. Demuestre que $P(\xi_{T_A} = i) = p(i)/\sum_{a \in A} p(a), i \in A$.

4. Demuestre que para una cadena de Markov irreducible con n estados es posible ir de cualquier estado i a cualquier otro estado j en $n-1$ pasos o menos.

5. Construimos una cadena de Markov de la siguiente manera: Si estamos en el estado $k, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, lanzamos un dado k veces, vemos al mayor valor obtenido y la cadena se mueve a ese estado. (a) Halle las probabilidades de transición y escriba la matriz de transición correspondiente. (b) ¿Es aperiódica esta cadena?. (c) ¿Tiene una única distribución estacionaria? (d) ¿Puedes hallar el estado más visitado en promedio?

6. Sea X_n una cadena de Markov irreducible y aperiódica con matriz de transición P y sea π su distribución estacionaria. Suponga que la distribución inicial de la cadena es π: $P(X_0 = i) = \pi(i)$ para todo $i \in \mathcal{E}$. (a) Fijamos N y sea $X_0^* = X_N, X_1^* = X_{N-1}, \ldots$. Demuestre que este es un proceso de Markov. (b) Sea P^* la matriz de transición de X_j^*. Halle las entradas P_{ij}^*. (c) Demuestre que P y P^* tienen la misma distribución estacionaria.

7. Suponga que el tiempo necesario para reparar una máquina tiene distribución exponencial de media 2. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la reparación tarde más de dos horas? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 1 y 3 horas? ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 5 horas si sabemos que tarda más de 3 horas? (d) ¿Cuál es la varianza del tiempo de reparación?

8. Amaranta y Berta entran a un salón de belleza simultáneamente, Amaranta a cortarse el pelo y Berta a teñírselo. Suponga que el tiempo para un corte tiene distribución exponencial con media 30 minutos mientras que para un teñido es exponencial con media 40 minutos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que Amaranta termine primero? (b) ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que ambas terminen?

9. Sean S y T variables con distribución exponencial con parámetros λ y μ. Sea $U = \text{mín}\{S, T\}$ y $V = \text{máx}\{S, T\}$. Halle (a) $\text{E}(U)$, (b) $\text{E}(V - U)$, (c) $\text{E}(V)$, (d) Use la identidad $V = S + T - U$ para obtener una fórmula distinta para $E(V)$.

10. Una linterna necesita dos baterías para funcionar. Inicialmente se tienen cuatro baterías numeradas del 1 al 4 y se colocan en la linterna las baterías 1 y 2. Cuando una batería falla se reemplaza por la batería con menor número que tenga carga. Suponga que la vida de las baterías es exponencial con media 100 horas. Sea T el instante en el cual sólo queda una batería con carga y sea N el número de la batería que todavía tiene carga. (a) Halle $\text{E}(T)$, (b) Halle la distribución de N.

11. Los clientes entran a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$. Sea $N(t)$ el número de clientes que han entrado hasta el instante t. Calcule las siguientes probabilidades:

$$(a)\ P(N(1) = 2), \qquad (b)\ P(N(1) = 2, N(3) = 6), \qquad (c)\ P(N(1) = 2 | N(3) = 6),$$

$$(d)\ P(N(3) = 6 | N(1) = 2), \qquad (e)\ P(N(1) \leq 2), \qquad (f)\ P(N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1).$$

12. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro 3. Sea τ_n en instante en el que ocurre el n-ésimo evento. Calcule (a) $\mathrm{E}(\tau_{12})$, (b) $\mathrm{E}(\tau_{12}|N(2) = 5)$, (c) $\mathrm{E}(N(5)|N(2) = 5)$.

13. Para analizar estadísticamente el bombardeo de Londres durante la segunda guerra mundial, se dividió el área de la ciudad en 576 sectores, cada uno con un área de 0.25 km^2, y se contó el número de bombas que cayó en cada uno. La tabla que presentamos a continuación muestra el número de sectores en los cuales cayeron exactamente k bombas.

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N° de sectores	229	211	93	35	7	1

Ajuste una distribución de Poisson a estos datos y con ella calcule las frecuencias esperadas de $0, 1, \ldots, 5$ bombas en 576 sectores.

14. Se observa una sustancia radioactiva durante 4 intervalos de 6 segundos cada uno. Si la frecuencia de las emisiones de partículas es de 0.5 por segundo, calcular la probabilidad de que (a) En cada intervalo se emitan 3 o más partículas, (b) En al menos un intervalo se emitan 3 o más partículas.

15. Un recipiente con colonias de bacteria visibles al microscopio como puntos oscuros se divide en cuadrados pequeños y se cuenta el número de colonias presentes en cada cuadrado. En las tablas siguientes presentamos el número observado de cuadrados con exactamente k puntos oscuros en dos experimentos realizados con diferentes tipos de bacterias. Explique por qué un proceso de Poisson es un modelo adecuado en este caso y compare la predicción de dicho modelo con los resultados observados en la práctica.

Caso 1:

k	0	1	2	3	4	5	≥ 6
N_k	5	19	26	26	21	13	8

Caso 2:

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N_k	8	16	18	15	9	7

16. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Definimos una nueva variable aleatoria N de la siguiente manera: Si $X_1 > 1$ entonces $N = 0$; si $X_1 \leq 1$ pero $X_1 + X_2 > 1$, entonces $N = 1$; en general, $N = k$ si

$$X_1 + \cdots + X_k \leq 1 < X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1}.$$

Demuestre que N tiene distribución de Poisson de parámetro λ. Este método puede ser usado para simular la distribución de Poisson. (Ayuda: $X_1 + \cdots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$. Condicione por el valor de la suma y use la ley de probabilidad total para mostrar que

$$P(N = k) = \int_0^1 [1 - F(1 - x)] f_k(x) dx,$$

donde $F(x)$ es la función de distribución exponencial y f_k es la densidad $\Gamma(k, \lambda)$).

17. El número de fallas $N(t)$ que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo $[0, t)$ es un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a $\lambda = 0.25h^{-1}$. ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en $[0, 8)$, al menos dos fallas en $[8, 16)$ y a lo sumo una falla en $[16, 24)$ (la unidad de tiempo es 1 hora). (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?

18. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 4$ por hora. Si la tienda abre a las $10:00$ am, (a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente un cliente haya llegado antes de las $10:30$? (b) Dado que (a) es cierto ¿cuál es la probabilidad de que un total de 5 clientes haya llegado antes de las 12:30? (c) Dado que (a) y (b) son ciertos ¿cuál es la probabilidad de que un total de 10 clientes hayan llegado durante el día, si la tienda cierra a las $6:00$ pm?