

Modelos Estocásticos I

Problemas 13

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 7/11/12

1. Considere una cadena de Markov sobre $\{1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$\begin{aligned}P_{ii+1} &= \frac{i}{2i+2} && \text{para } i \geq 1, \\P_{ii-1} &= \frac{1}{2} && \text{para } i \geq 2, \\P_{ii} &= \frac{1}{2i+2} && \text{para } i \geq 2,\end{aligned}$$

y $P_{11} = 1 - P_{12} = 3/4$. Demuestre que no tiene distribución estacionaria.

2. A fin de mes, una tienda clasifica las cuentas de sus clientes según estén al día (estado 0), tengan entre 30 y 60 días de atraso (1), tengan entre 60 y 90 días de atraso (2) y tengan más de 90 días de atraso (3). Por experiencia previa saben que las cuentas se mueven de un estado a otro según una cadena de Markov con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

A largo plazo, ¿qué fracción de la cuentas está en cada categoría?

3. Considere dos cadenas de Markov con matrices de transición

$$i) P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad ii) P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Demuestre en cada caso que la cadena es irreducible.
b) Halle el período.
c) Halle la distribución estacionaria.
4. Considere dos cadenas de Markov con matrices de transición

$$i) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \quad ii) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- a) Halle la distribución estacionaria concentrada en cada uno de los conjuntos cerrados irreducibles.
b) Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(i, j)/n$.
5. Considere una cadena de Markov sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$\begin{aligned}P_{ii+1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{i+2}\right) && \text{para } i \geq 0, \\P_{ii-1} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{i+2}\right) && \text{para } i \geq 0,\end{aligned}$$

y $P_{00} = 1 - P_{01} = 3/4$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

6. Considere una cadena de Ehrenfest. Suponga que inicialmente todas las bolas están en la segunda caja. Calcule el tiempo esperado para que el sistema regrese a ese estado. (Ayuda: Use el resultado del ejercicio 11 de la lista de problemas 12)
7. Una persona tiene tres paraguas, algunos en su oficina y otros en su casa. Si al salir de su casa en la mañana, o del trabajo en la noche, está lloviendo, toma un paraguas, si hay uno disponible. Si no hay, se moja. Suponga que, independientemente del pasado, la probabilidad de que llueva en cada viaje es de 0.2. Sea X_n el número de paraguas en el sitio en cual se encuentra en ese instante. a) Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov. b) Calcule la fracción del tiempo que la persona se moja (asintóticamente).
8. Tenemos dos cajas y $2N$ bolas de las cuales N son rojas y N negras. Comenzamos con N bolas en cada caja y en cada paso escogemos una bola al azar de cada caja y las intercambiamos. Si X_0 es el número de bolas rojas en la caja de la izquierda al comienzo y X_n , $n \geq 1$ es el número de bolas rojas en la caja de la izquierda al final del n -ésimo paso, halle la matriz de transición y la distribución estacionaria.
9. Considere los números $1, 2, \dots, 12$ escritos en una circunferencia, como si fuera un reloj. Considere una cadena de Markov que en cada punto salta a cualquiera de los estados adyacentes con igual probabilidad. a) ¿Cuál es el valor esperado del número de pasos necesarios para regresar a la posición inicial? b) ¿Cuál es la probabilidad de que X_n visite todos los otros estados antes de regresar al estado inicial?
10. Calcular el periodo de las siguientes cadenas
- Cadena de Ehrenfest.
 - Caminata aleatoria simple.
 - Cadena de nacimiento y muerte, con algún $r_i > 0$.
11. **El inverso de la cadena de Rachas.** Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ con matriz de transición $P_{i,i-1} = 1$, $\forall i \geq 1$, y $P_{0,i} = p_i > 0$, $\forall i \geq 0$, con $\{p_i, i \geq 0\}$ una sucesión de reales estrictamente positivos tales que

$$\sum_{i \geq 0} p_i = 1.$$

- Hacer un dibujo esbozando una trayectoria de la cadena de rachas (vista en clase) y otro esbozando esta cadena. ¿Que observa?
- Muestre que esta cadena es irreducible y recurrente. (Ayuda: Calcule $P_0(T_0 < \infty)$.)
- Muestre que esta cadena es recurrente positiva si y solamente si

$$\sum_{n \geq 1} np_n < \infty.$$

(Ayuda: calcule $E_0(T_0)$.)

- Calcular el vector de probabilidad invariante π resolviendo el sistema $\pi P = \pi$, bajo la hipótesis de que la cadena es recurrente positiva. Calcule $E_y(T_y)$, para todo $y \geq 1$.
- Estudie el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz de transición.

12. Considere una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Demuestre que la cadena es irreducible
- Calcule el periodo de la cadena
- Calcule la distribución estacionaria
- Describa el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz P