Modelos Estocásticos I

Problemas 1

Los problemas 2, 4 y 12 son para entregar el miércoles 15/08/12

1. a) Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de conjuntos. Definimos el límite superior de la sucesión por

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

y el límite inferior por

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Si

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$$

decimos que la sucesión A_n converge y que su límite es el valor común de estos límites.

Demuestre que el límite superior es el conjunto de los puntos que pertenecen a infinitos conjuntos A_n, mientras que el límite inferior es el conjunto de los puntos que pertenecen a todos los conjuntos A_k a partir de un cierto índice (que puede depender del punto).

b) Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de conjuntos. Decimos que la sucesión es *creciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$. La sucesión es *decreciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. En cualquiera de estos dos casos decimos que la sucesión es monótona.

Demuestre que para una sucesión creciente

$$\limsup_n A_n = \bigcup_n A_n$$

mientras que si la sucesión es decreciente,

$$\liminf_n A_n = \bigcap_n A_n.$$

c) Demuestre que una medida de probabilidad es continua para sucesiones monótonas, es decir, si $\{A_n,\, n \geq 1\}$ es una sucesión monótona,

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n).$$

2. a) Sea Ω un conjunto cualquiera y $\mathcal{P}(\Omega)$ la colección de todos los subconjuntos de Ω. Demuestre que $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra.

b) Demuestre que la intersección de (cualquier cantidad de) σ-álgebras es también una σ-álgebra.

c) Usando los incisos anteriores demuestre que dada cualquier colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, existe una mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, que denotamos por $\sigma(\mathcal{C})$ (Mínima quiere decir que si $\mathcal{A}$ es cualquier σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ entonces también contiene a $\sigma(\mathcal{C})$).

3. Demuestre que una σ-álgebra es cerrada bajo intersecciones numerables, diferencias y diferencias simétricas ($A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

4. a) Considere el experimento de lanzar una moneda dos veces al aire. Describa el espacio de probabilidad que sirve de modelo para este experimento.

b) Considere ahora las siguientes funciones definidas sobre el espacio Ω: X_i vale 1 si el i-ésimo lanzamiento es águila y 0 si no, para $i = 1, 2$. Describa las σ-álgebras generadas por estas variables aleatorias.

c) Finalmente considere la función $Z = X_1 + X_2$. Describa la σ-álgebra generada por esta función.

5. Cierta vacuna brinda protección parcial contra una enfermedad, de modo que una persona vacunada tiene probabilidad 0.4 de contraer la enfermedad, mientras que para una persona no vacunada esta probabilidad es de 0.8. Si 75 % de la población está vacunada, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene la enfermedad haya sido vacunada?

6. Luego de una serie de pruebas para evaluar un nuevo tipo de examen para detectar cáncer, se ha determinado que 97 % de los pacientes cancerosos de un hospital reaccionan positivamente, mientras que sólo 5 % de aquellos que no tienen cáncer muestran un resultado positivo. Si 2 % de los pacientes del hospital tienen cáncer, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar que reacciona positivamente al examen realmente tenga cáncer?

7. Sea A, B y C eventos con probabilidad estrictamente positiva. Demuestre las siguientes relaciones:
   a) $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(B)P(A|B)$
   b) $P(A \cap B|B \cup C) = P(A \cap B|B)P(B|B \cup C)$
   c) $P(B \cap C|A) = P(C|A)P(B|A \cap C)$ si $P(A \cap C) \neq 0$
   d) $P(A|B)P(B|C)P(C|A) = P(B|A)P(C|B)P(A|C)$
   e) $\frac{P(A|A\cup B)}{P(B|A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

8. Demuestre: $\frac{P(B^c|A)}{P(B)} + \frac{P(A^c)}{P(A)} = \frac{P(A^c|B)}{P(A)} + \frac{P(B^c}{P(B)}$.

9. Tres sucursales de una tienda tienen 8, 12, y 14 empleados de los cuales 4, 7 y 10 son mujeres, respectivamente. a) Se escoge una sucursal al azar y de ella se escoge un empleado. Si éste es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que ella trabaje en la sucursal con 12 empleados? b) Si se escoge un segundo empleado de la misma sucursal, ¿cuál es la probabilidad de que se escoja una mujer?

10. Demuestre que si
$$\frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)} = \frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)},$$
entonces A y B son independientes.

11. Sea A, B y C eventos independientes y $P(C) \neq 0$. Demuestre:
    a) $P(A \cap B|C) = P(A)P(B|C)$. b) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.
    c) $P(A|B \cap C) = P(A)$ siempre que $P(B \cap C) \neq 0$.

12. Sean $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5, 6\}$ Lanzamos dos dados y sean los eventos A : 'el primer dado cae en H', B :'El segundo dado cae en H', C :'un dado cae en G y el otro en H', D :'el total es cuatro', E : 'el total es cinco' y F : 'el total es siete'. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?
    a) A y F son independientes.
    b) A y D son independientes.
    c) A y E son independientes.
    d) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
    e) A y C son independientes.
    f) C y E son independientes.
    g) $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.
    h) A, C y E son independientes.

13. a) De un ejemplo de tres eventos A, B y C tales que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero $P(A^c \cap B^c \cap C^c) \neq P(A^c)P(B^c)P(C^c)$. b) Demuestre que si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$; $P(A^c \cap B \cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$; $P(A \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C)$ y $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c)$ entonces A, B y C son independientes.

14. Sea X una variable aleatoria discreta con valores en el conjunto $\{x_i = 1 - 2^{-i}, i \geq 1\}$, con probabilidades respectivas $p_i = 2^{-i}$. Describa la función de distribución asociada. Calcule la probabilidad de que la variable tome valores en los intervalos $(1/2, 7/8]$ y $(3/4, 1]$. ¿Cuál es la media y la varianza de esta variable?

15. Sea X una v.a. continua con densidad f. Demuestre que para cualquier valor x de X se tiene que $P(X = x) = 0$.

16. Sean U, V y W variables aleatorias independientes con igual varianza σ^2. Definimos $X = U + W$ e $Y = V - W$. Halle la covarianza entre X e Y.

17. Sean X e Y variables aleatorias independientes cada una con densidad uniforme
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$
Hallar la densidad conjunta de las variables U y V, donde $U = \text{máx}(X, Y)$ y $V = \text{mín}(X.Y)$.