Nombre: ____

1	2	3	4	5	6	T

Modelos Estocásticos I

Examen Final

Lunes 26/11/2012, 9:30 a.m. – 13:30 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice. La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Inicie cada pregunta en una hoja nueva. Puede usar ambos lados de la hoja y no es necesario volver a copiar el enunciado de los problemas.

Responda 4 de las siguientes preguntas.

1. (a) Determine si cada una de las siguientes relaciones es cierta o falsa. Si es cierta, demuéstrela. Si es falsa, de un contraejemplo:

$$(i)\quad P(A|B) + P(A^c|B) = 1.$$
$$(ii)\ P(A|B) + P(A|B^c) = 1.$$

   (b) Una caja contiene a bolas azules y b bolas blancas. Sacamos una bola seleccionada al azar, observamos su color y la regresamos a la caja junto con d bolas más del mismo color. Este procedimiento se repite una segunda vez. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca dado que la segunda bola es blanca?

2. a) En una cadena de Markov ¿Cómo se define el período de un estado? Demuestre que si el estado i es recurrente y $i \to j$ entonces j también es recurrente. Demuestre también que si $i \leftrightarrow j$ entonces ambos estados tienen el mismo período.

   b) Considere un proceso de ramificación que inicia con un solo individuo y sea X_n el tamaño de la n-ésima generación. Suponga que la descendencia de cualquier individuo de la población sigue una ley binomial de parámetros 2 y p, para $0 < p < 1$. Halle la probabilidad de extinción y determine una condición sobre p para que la extinción de la población sea segura.

3. a) Sea $X_n, n \geq 0$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ y matriz de transición P. ¿Cómo se define la distribución estacionaria π de esta cadena de Markov?

   Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ finito y matriz de transición P. Suponga que para algún $i \in \mathcal{E}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \alpha(j)$ para todo $j \in \mathcal{E}$. Demuestre que $\alpha(j), j \in \mathcal{E}$ es una distribución de probabilidad y es estacionaria para la matriz P. ¿Cuándo es única esta distribución?

   b) Considere una cadena de Markov de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$P_{i,i+1} = \frac{i+2}{2i+3} \quad \text{para } i \geq 0, \qquad P_{i,i-1} = \frac{i+1}{2i+3} \quad \text{para } i \geq 1,$$

y $P_{00} = 1 - P_{01} = 1/3$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

4. Considere una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y clasifique los estados. Determine cuáles clases son cerradas. En cada caso enuncie claramente el criterio utilizado.

   b) Calcule el período de las clases recurrentes.

   c) Halle la distribución estacionaria concentrada en cada uno de los conjuntos cerrados irreducibles y determine la forma general de las distribuciones estacionarias de la cadena.

   d) Halle $\lim_{n\to\infty} G_n(i,j)/n$ para $i, j \in \mathcal{E}$, donde $G_n(i,j) = \mathrm{E}(N_n(i,j))$ y $N_n(i,j)$ es el número de visitas que la cadena ha realizado al estado j hasta el instante n si inicia en el estado i .

5. Por una parada de autobuses pasan dos líneas, la azul y la roja, ambas de acuerdo a procesos de Poisson independientes con intensidades respectivas de 5 y 6 camiones por hora.

   (a) Si en los primeros 30 minutos han pasado tres camiones de la linea azul, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos hayan pasado en los primeros 20 minutos?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un período de 15 minutos no pase ningún camión (de cualquier línea)?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer camión que pase sea de la línea azul?

   (d) Si en la primera media hora han pasado seis camiones por la parada, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellos hayan sido de la línea roja?

   (e) El Servicio Municipal de Transporte de la ciudad ha instalado en la parada un detector electrónico que registra las señales emitidas por un dispositivo en los camiones para controlar la frecuencia con la que cubren el servicio. Sin embargo, el sistema falla un 10 % de las veces en detectar las señales. Si al cabo de 20 minutos el sistema ha detectado tres camiones de la línea roja que han pasado por la parada ¿cuál es la probabilidad de que en realidad hayan pasado 4?

6. Tenemos dos máquinas, M_1 que tiene tiempo de vida T_1 exponencial de parámetro λ_1 y M_2 con tiempo de vida exponencial de parámetro λ_2. Estos tiempos de vida son independientes. La operación de la máquina M_1 se inicia en el instante 0 mientras que la de M_2 se inicia en el instante T.

   (a) Suponga que T es determinístico. Halle la probabilidad de que M_1 sea la primera en fallar.

   (b) Responda la misma pregunta si T tiene distribución exponencial de parámetro μ y es independiente de las máquinas.