Modelos Estocásticos I

Examen Final

Respuestas

Responda 4 de las siguientes preguntas.

1. a) Sea $X_n, n \geq 0$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ y matriz de transición P.

   ¿Cómo se define la distribución estacionaria π de esta cadena de Markov?

   Demuestre que si una cadena de Markov inicia con una distribución estacionaria, entonces para cualquier n, la distribución de X_n es la distribución estacionaria.

   Demuestre que si para todo $i \in \mathcal{E}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \nu_j$ para todo $j \in \mathcal{E}$ y la cadena tiene un distribución estacionaria π entonces ν_j, $j \in \mathcal{E}$ es igual a la distribución estacionaria $\pi(j)$.

   b) P es la matriz de transición de una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Calcule la probabilidad de que la cadena sea absorbida por el estado 4 si inicia en el estado i, para $i = 0, 1, 2, 3$. Calcule también el tiempo medio para la absorción.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta. Ver las notas para la parte (a). Para la parte (b) hacemos un análisis de la primera transición. Llamemos u_i para $i = 0, 1, 2, 3, 4$ la probabilidad de que la cadena sea absorbida por el estado 4 si inicia en el estado i. Claramente $u_0 = 0$ y $u_4 = 1$. Para hallar las otra probabilidades tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_2 \\ u_2 &= \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 \\ u_3 &= \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de u_0 y u_4 tenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3}u_2 \\ u_2 &= \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2} \\ u_3 &= \frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

y obtenemos los valores $u_1 = 4/9; u_2 = 2/3; u_3 = 1/3$. Para hallar el tiempo medio para la absorción llamamos v_i, $i = 0, \dots 4$ el tiempo medio si la cadena inicia en el estado i. Tenemos $v_0 = v_4 = 0$ y para los otros valores obtenemos un sistema de ecuaciones similar al anterior, teniendo en cuenta que al considerar la primera transición ya hemos dado un paso:

$$v_1 = 1 + \frac{2}{3}v_2$$
$$v_2 = 1 + \frac{1}{2}v_3$$
$$v_3 = 1 + \frac{1}{2}v_2$$

Las soluciones de este sistema son $v_1 = 7/3; v_2 = v_3 = 2$.

2 Considere una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

a) Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y clasifique los estados. Determine cuales clases son cerradas. En cada caso enuncie claramente el criterio utilizado.

b) Calcule el período de las clases recurrentes.

c) Halle la distribución estacionaria.

d) Describa el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz P.

Respuesta. (a) La figura 1 muestra el esquema de transiciones de esta cadena.

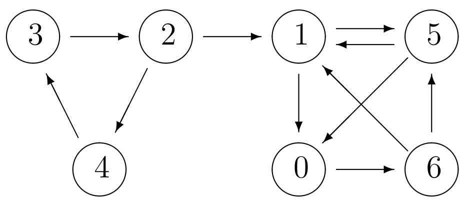

Figura 1

Vemos que hay dos clases de equivalencia, $\{2, 3, 4\}$ que es de estados transitorios porque de cualquiera de ellos se puede salir y no regresar, y $\{0, 1, 5, 6\}$ que es finita, cerrada e irreducible y por lo tanto de estados recurrentes.

(b) El período de la segunda clase es el período de cualquiera de sus elementos y observamos que al estado 0 podemos regresar en un paso: $P_{00} = 0.4 > 0$. por lo tanto el período es 1, la clase es aperiódica y existe una distribución estacionaria concentrada en esta clase.

(c) Sabemos que la distribución estacionaria vale 0 en los estados transitorios. Para hallar el valor de la distribución en los estados recurrentes tenemos que resolver el sistema

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_5, \pi_6)\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned} 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.4\pi_5 &= \pi_0 \\ 0.6\pi_1 + 0.4\pi_5 + 0.2\pi_6 &= \pi_1 \\ 0.2\pi_5 + 0.4\pi_6 &= \pi_5 \\ 0.6\pi_1 + 0.4\pi_6 &= \pi_6 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $\pi = (2/7, 2/7, 1/7, 2/7)$.

(d) Cuando $n \to \infty$ la matriz P^n va a converger a una matriz cuyas filas son todas iguales al vector $(2/7, 2/7, 0, 0, 0, 1/7, 2/7)$.

3 a) ¿Cómo se define el período de un estado? Demuestre que si el estado i es recurrente y $i \to j$ entonces j también es recurrente. Demuestre también que si $i \leftrightarrow j$ entonces ambos estados tienen el mismo período.

b) Considere una cadena de Markov de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \frac{i+2}{2i+6} \qquad \text{para } i \geq 0, \\ P_{i,i-1} &= \frac{i+4}{2i+6} \qquad \text{para } i \geq 1, \end{aligned}$$

y $P_{00} = 1 - P_{01} = 2/3$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

Respuesta. Para la parte (a) ver las notas del curso.

(b) Definimos

$$\gamma_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{q_i}{p_i}, \qquad \nu_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{p_{i-1}}{q_i}$$

con $\gamma_0 = \nu_0 = 1$ y $p_i = P_{i,i+1}, q_i = P_{i,i-1}$. Sabemos por los resultados del curso (pags. 104-5 de las notas) que la cadena es recurrente positiva si y sólo si

$$\sum_j \gamma_j = \infty, \qquad \text{y} \quad \sum_j \nu_j < \infty. \tag{1}$$

Veamos que estas condiciones se satisfacen en este caso.

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{q_1 q_2 \cdots q_j}{p_1 p_2 \cdots p_j} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (j+2)(j+3)(j+4)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (j+1)(j+2)} = \frac{(j+3)(j+4)}{3 \cdot 4} \\ \nu_j &= \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j} = \frac{\frac{2}{6}\frac{3}{8}\frac{4}{10} \cdots \frac{j+1}{2j+4}}{\frac{5}{8}\frac{6}{10}\frac{7}{12} \cdots \frac{j+3}{2j+4}\frac{j+4}{2j+6}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (2j+6)}{6(j+2)(j+3)(j+4)} = \frac{8}{(j+2)(j+4)} \end{aligned}$$

A partir de estos resultados observamos que $\gamma_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$ de modo que la primera condición de (1) se satisface. Por otro lado $\nu_j \leq 8/j^2$ de modo que la segunda condición también es válida y la cadena es recurrente positiva.

Para hallar la distribución estacionaria π tenemos que hallar el valor de $\sum_j \nu_j$ y para esto hacemos un desarrollo en fracciones parciales:

$$\nu_j = \frac{8}{(j+2)(j+4)} = \frac{A}{j+2} + \frac{B}{j+4} = \frac{(A+B)j + 4A + 2B}{(j+2)(j+4)} \tag{2}$$

de donde obtenemos $A = -B = 4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \nu_j &= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{j+2} - \frac{4}{j+4}\Big) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{4}{j+2} - \frac{4}{j+4}\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{4}{3} + \frac{4}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{4}{k+2} - \frac{4}{5} - \frac{4}{6} - \cdots - \frac{4}{k+3} - \frac{4}{k+4}\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{4}{3} + 1 - \frac{4}{k+3} - \frac{4}{k+4}\Big) = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

La distribución estacionaria está dada por

$$\pi(j) = \frac{\nu_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \nu_j} = \frac{24}{7(j+2)(j+4)}.$$

4 Un circuito electrónico puede tener dos tipos de fallas. Las fallas tipo A ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa 0.1 por día mientras que las fallas tipo B ocurren de acuerdo a otro proceso de Poisson independiente del proceso anterior y de tasa 0.05 por día. En ambos casos los componentes que producen las fallas tienen componentes iguales conectados en paralelo, de modo que al producirse la falla el componente es reemplazado de manera inmediata y el circuito continua funcionando sin interrupción. Un mecanismo alerta al operador que el fallo se ha producido y éste procede a reemplazar el componente dañado, de modo que al próximo fallo haya un componente listo para funcionar.

a) Si hace 4 días ocurrió la última falla ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 10 días ocurra al menos una falla?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que ocurre sea de tipo A?

c) Si durante un período de 10 días ocurren 4 fallas ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas sean de tipo A?

d) Si durante un período de 10 días ocurren 4 fallas ¿cuál es la probabilidad de que exactamente una de ellas haya ocurrido en los primeros 2 días?

e) El mecanismo que alerta al operador falla un 10 % de la veces para ambos tipos de falla. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que es detectada sea del tipo B?

Respuesta. Llamemos $N_A(t)$ al proceso de fallas tipo A y $N_B(t)$ al proceso de fallas tipo B. Ambos son procesos de Poisson, el primero con intensidad $\lambda_A = 0.1$ fallas por día mientras que para el segundo tenemos $\lambda_B = 0.05$ fallas por día. Como son independientes, el proceso de fallas $N(t) = N_A(t) + N_B(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 0.15$ fallas por día.

a) El tiempo de espera T hasta la próxima falla tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.15$. Queremos hallar la probabilidad de que este tiempo de espera sea menor que 10 días, sabiendo que en los últimos cuatro días no ha ocurrido ninguna falla. Por la falta de memoria de la distribución exponencial, la probabilidad que deseamos es

$$P(T < 10) = 1 - e^{-1.5}.$$

b) Sean T_A y T_B los tiempos de espera hasta el primer evento de tipo A y de tipo B, respectivamente. Estas son variables con distribución exponencial de parámetros 0.1 y 0.05 respectivamente. Por lo tanto (pag. 110 de las notas)

$$\begin{aligned} P(T_A < T_B) &= \int_0^\infty P(T_B > t | T_A = t) f_{T_A}(t)\, dt = \int_0^\infty 0.1 e^{0.1\times t} e^{0.05\times t}\, dt \\ &= \frac{0.1}{0.15} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(N_A(10) = 3 | N(10) = 4) &= \frac{P(N_A(10) = 3, N(10) = 4)}{P(N(10) = 4)} = \frac{P(N_A(10) = 3, N_B(10) = 1)}{P(N(10) = 4)} \\ &= \frac{P(N_A(10) = 3) P(N_B(10) = 1)}{P(N(10) = 4)} = \frac{e^{-1} e^{-0.5} 0.5 \times 4!}{e^{-1.5} 3! \times (1.5)^4} \\ &= \frac{2}{(1.5)^4} = 0.395 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P(N(2) = 1 | N(10) = 4) &= \frac{P(N(2) = 1, N(10) = 4)}{P(N(10) = 4)} = \frac{P(N(2) = 1, N(10) - N(2) = 3)}{P(N(10) = 4)} \\ &= \frac{P(N(2) = 1) P(N(10) - N(2) = 3)}{P(N(10) = 4)} = \frac{e^{-0.3}(0.3) e^{-1.2}(1.2)^3 4!}{3!(1.5)^4 e^{-1.5}} \\ &= (0.8)^4 = 0.4096 \end{aligned}$$

e) Este problema es similar al del inciso (b) pero ahora los procesos de fallas detectadas tienen parámetros $0.9 \times 0.1 = 0.09$ y $0.9 \times 0.05 = 0.045$. Siguiendo el mismo razonamiento vemos que la probabilidad es

$$\frac{0.045}{0.135} = \frac{1}{3}$$

que es equivalente a la anterior porque la probabilidad de falla en el sistema de detección es la misma para ambos tipos de falla.

5 Los turistas llegan en auto a una ciudad de playa de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad λ y permanecen un tiempo Z con distribución $P(Z \leq t) = G(t)$. El tiempo de permanencia de cada auto es independiente del proceso de llegadas y de los otros tiempos de permanencia. Si se consideran sólo los autos que llegan a partir de un instante fijo $t = 0$, llamamos $X(t)$ al número de autos de turistas que se encuentran en la ciudad en el instante t

a) Halle la distribución de $X(t)$, $t \geq 0$.

b) Si $\mu(t) = \mathrm{E}(X(t))$, halle $\lim_{t\to\infty} \mu(t)$.

c) Halle el valor de $\mu(t)$ si Z tiene distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$.

Respuesta. a) Un auto que llega en el instante s está en la ciudad en el instante $t > s$ con probabilidad

$$P(Z > t - s) = 1 - G(t - s)$$

Dado que $N(t) = n$ los tiempos de llegada $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ de los n autos a la ciudad tienen distribución uniforme en $[0, t]$ y son independientes. Para el cálculo que queremos hacer el orden de las llegadas no es importante. Por lo tanto la probabilidad de que uno cualquiera de los n autos que llegaron en $[0, t]$ todavía esté en la ciudad es

$$p(t) = \int_0^t (1 - G(t - s))\frac{1}{t}\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t (1 - G(s))\,ds$$

Como los tiempos de permanencia son independientes entre si y del proceso,

$$P(X(t) = i|N(t) = n) = \binom{n}{i}(p(t))^i(1 - p(t))^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Usando la ley de la probabilidad total

$$\begin{aligned}
P(X(t) = i) &= \sum_{n=i}^{\infty} P(X(t) = i|N(t) = n)P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i}(p(t))^i(1 - p(t))^{n-i}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n=i}^{\infty} \frac{n!}{i!(n-i)!n!}(\lambda t p(t))^i(\lambda t(1 - p(t)))^{n-i} \\
&= \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!}e^{\lambda t}\sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{(n-i)!}(\lambda t(1 - p(t)))^{n-i} \\
&= \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!}e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t(1 - p(t)))^{n} \\
&= \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!}e^{\lambda t}e^{\lambda t(1-p(t))} \\
&= \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!}e^{\lambda t p(t)}
\end{aligned}$$

de modo que $X(t)$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda t p(t)$.

b) Sea $\mu(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \lambda t p(t)$. Como

$$p(t) = \int_0^t (1 - G(t - s))\frac{1}{t}\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t (1 - G(s))\,ds$$

cuando $t \to \infty$,

$$\int_0^{\infty} (1 - G(s))\,ds \to \mathrm{E}(Z),$$

y $\mu(t) \to \lambda\,\mathrm{E}(Z)$.

c) Si $Z \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$ entonces

$$p(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (1 - G(s))\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha s}ds = \frac{1}{\alpha t}\big(1 - e^{-\alpha t}\big)$$

y

$$\mu(t) = \frac{\lambda}{\alpha}\big(1 - e^{-\alpha t}\big).$$

Observamos que cuando $t \to \infty$, $\mu(t) \to \lambda/\alpha$.