

# Modelos Estocásticos I

## Problemas 8

Los problemas 3, 5, 7 y 12 son para entregar el miércoles 12/10/11

1. Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$  una cadena de Markov y sea  $\{n_k, k \geq 0\}$  una sucesión creciente y no acotada de enteros positivos. Demuestre que  $Y_k = X_{n_k}$  también es una cadena de Markov, posiblemente no-homogénea. Halle la matriz de transición de  $Y$  cuando  $n_k = 2k$  y  $X$  es el paseo al azar simple.
2. Considere una sucesión infinita de ensayos de Bernoulli independientes y simétricos ( $p = q = 0.5$ ). Sea  $A_n$  el número de éxitos al cabo de  $n$  lanzamientos y  $B_n$  el número de fracasos. Considere  $X_n = A_n - B_n$ ,  $Y_n = |A_n - B_n|$ . Determine si  $X_n, Y_n$  son cadenas de Markov y en caso afirmativo halle sus matrices de transición.
3. Dada cualquier matriz de transición  $P$ , demuestre que es fácil aumentarla añadiendo nuevos estados que tienen acceso a los estados iniciales, pero es imposible añadir un nuevo estado que se comunique con alguno de los estados iniciales.
4. En la estrategia 'doble o nada' el jugador apuesta todo lo que tiene y tiene probabilidad 0.5 de duplicar su capital o de perderlo todo. Suponga que comienza con 1 peso y decide jugar  $n$  juegos o hasta que se arruine. Describa la cadena de Markov y halle su matriz de transición.
5. (a) Un esquema similar al modelo de Ehrenfest, usado por Daniel Bernoulli y Laplace para estudiar el flujo de líquidos incompresibles entre dos recipientes, es el siguiente. Hay  $N$  bolas blancas y  $N$  negras en dos cajas, cada una de las cuales contiene  $N$  bolas. Se selecciona una bola de cada caja y se coloca en la otra. Halle la matriz de transición para el número de bolas blancas en la primera caja.  
(b) Considere dos cajas,  $A$  y  $B$ , que contienen un total de  $N$  bolas. Se selecciona una bola al azar del total de  $N$  bolas y luego se selecciona una caja,  $A$  con probabilidad  $p$  y  $B$  con probabilidad  $q = 1 - p$  y la bola seleccionada se coloca en esta caja. El estado del sistema está representado por el número de bolas en  $A$ . Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov.  
(c) Considere dos cajas,  $A$  y  $B$ , que contienen un total de  $N$  bolas. Suponga que en el instante  $n$  la caja  $A$  tiene exactamente  $k$  bolas. En el instante  $n + 1$  se selecciona una caja al azar proporcionalmente al número de bolas que contiene, es decir, la caja  $A$  tiene probabilidad  $k/N$  de ser escogida. Luego se selecciona una bola de  $A$  con probabilidad  $p$  o de  $B$  con probabilidad  $q$  y se coloca en la caja que ha sido seleccionada. Determine la matriz de transición para esta cadena de Markov.
6. Considere dos cajas,  $A$  y  $B$ , que contienen un total de  $N$  bolas. Suponga que en el instante  $n$  la caja  $A$  tiene exactamente  $k$  bolas. En el instante  $n + 1$  se seleccionan una caja y una bola al azar, proporcionalmente al número de bolas que contiene cada caja, es decir, se selecciona una bola de la caja  $A$  con probabilidad  $k/N$ . Esta bola se coloca en la caja  $A$  con probabilidad  $k/N$  y en la caja  $B$  con probabilidad  $(N - k)/N$ . Determine la matriz de transición para esta cadena de Markov.
7. Sea  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$  una sucesión de variables de Bernoulli independientes y simétricas y sea  $X_n = (\xi_n + \xi_{n+1})/2$ . Halle las probabilidades de transición  $P_{i,j}^{(m,n)} = P(X_n = j | X_m = i)$  para  $m < n$ ,  $i, j = -1, 0, 1$ . Demuestre que  $(X_n)$  no es una cadena de Markov.
8. Sea  $X_n$ ,  $n \geq 1$  una cadena de Markov y sea  $\tau$  el primer instante para el cual  $X_n \neq X_0$ , con  $\tau = +\infty$  si  $X_n = X_0$  para todo  $n \geq 0$ . Calcule  $E(\tau | X_0 = i)$  en términos de  $P_{ii}$ .
9. Considere un sistema de inventario en tiempo discreto donde  $X_n$  indica el número de objetos en el sistema al inicio del período  $n$ . Al inicio de cada período, el inventario decrece una unidad si el nivel de inventario es positivo. En caso contrario el inventario permanece a nivel 0 hasta el fin del período. Al final del  $n$ -ésimo período se surte el inventario una cantidad  $V_n$ , donde las  $V_n$  son v.a.i.i.d. con distribución  $p_i = P(V_1 = i)$ ,  $i \geq 0$ . Bajo estas hipótesis  $X_{n+1} = (X_n - 1 + V_n)$  si  $X_n > 0$  y  $X_{n+1} = V_n$  si  $X_n = 0$ . Justifique que  $X_n$  es una cadena de Markov y halle su matriz de transición.

10. De nuevo, considere un sistema de inventario en tiempo discreto donde  $X_n$  indica el número de objetos en el sistema al inicio del período  $n$ . En cada período se surte una unidad al inventario y éste decrece  $U_n$  unidades, si es posible. En este caso el inventario al inicio del período  $n + 1$  es  $X_{n+1} = (X_n - U_n + 1)^+$ . Suponga que las variables  $U_n$  son i.i.d. con distribución  $p_i = P(U_1 = i)$ ,  $i \geq 0$ . Justifique que  $X_n$  es una cadena de Markov y halle su matriz de transición.

11. Definimos el instante de la  $k$ -ésima visita al estado  $j$  por

$$T_j^k = \text{mín}\{n > T_j^{k-1} : X_n = j\}$$

para  $k \geq 1$  y ponemos  $T_j^0 = 0$ . Con esta definición  $T_j^1$  coincide con  $T_j$ , como fue definido en clases. Demuestre que para  $k \geq 1$ ,  $P_i(T_j^k < \infty) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{k-1}$ .

12. Con las definiciones vistas en clase, demuestre que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^n P_i(T_j = m)P_{jj}^{n-m},$$

para  $n \geq 1$ . Demuestre que si  $a$  es un estado absorbente,  $P_{ia}^n = P_i(T_a \leq n)$ , para  $n \geq 1$ .

13. a) Demuestre que  $\rho_{ij} > 0$  si y sólo si  $P_{ij}^n > 0$  para algún entero positivo  $n$ .

b) Demuestre que si  $P_{ij} = 0$  siempre que  $i \in C$ ,  $j \notin C$ , entonces  $C$  es cerrado.

14. Decimos que una v. a.  $T$  es un *tiempo de parada* para el proceso  $(X_n)_{n \geq 1}$  si, para cada  $n$ , es posible determinar si el suceso  $\{T = n\}$  ocurrió o no observando los valores del proceso hasta el tiempo  $n$ :  $X_0, X_1, \dots, X_n$ .

Sea  $i$  un estado cualquiera de la cadena. Demuestre que  $T_i$ , el instante de la primera visita a  $i$ , es un tiempo de parada pero  $\tau_i$ , el instante de la última visita a  $i$ , no lo es.

15. Sea  $T$  un tiempo de parada para la cadena de Markov  $(X_n)_{n \geq 1}$ . Demuestre la siguiente propiedad (que es una versión de la Propiedad Fuerte de Markov)

$$P(X_{T+1} = j | X_k = i_k \text{ para } 0 \leq k < T, X_T = i) = P(X_{T+1} = j | X_T = i).$$