Nombre: ____________________________________

1	2	3	4	5	T

Modelos Estocásticos I

Examen Final

Martes 29/11/10, 10 a.m. – 2 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 4 de las siguientes preguntas.

1. a) Sea $X_n, n \geq 0$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ y matriz de transición P.

   ¿Cómo se define la distribución estacionaria π de esta cadena de Markov?

   Demuestre que si una cadena de Markov inicia con una distribución estacionaria, entonces para cualquier n, la distribución de X_n es la distribución estacionaria.

   Demuestre que si para todo $i \in \mathcal{E}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \nu_j$ para todo $j \in \mathcal{E}$ y la cadena tiene un distribución estacionaria π entonces ν_j, $j \in \mathcal{E}$ es igual a la distribución estacionaria $\pi(j)$.

   b) P es la matriz de transición de una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Calcule la probabilidad de que la cadena sea absorbida por el estado 4 si inicia en el estado i, para $i = 0, 1, 2, 3$. Calcule también el tiempo medio para la absorción.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considere una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

   a) Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y clasifique los estados. Determine cuales clases son cerradas. En cada caso enuncie claramente el criterio utilizado.

b) Calcule el período de las clases recurrentes.

c) Halle la distribución estacionaria.

d) Describa el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz P.

3. a) ¿Cómo se define el período de un estado? Demuestre que si el estado i es recurrente y $i \to j$ entonces j también es recurrente. Demuestre también que si $i \leftrightarrow j$ entonces ambos estados tienen el mismo período.

   b) Considere una cadena de Markov de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$P_{i,i+1} = \frac{i+2}{2i+6} \quad \text{para } i \geq 0,$$
$$P_{i,i-1} = \frac{i+4}{2i+6} \quad \text{para } i \geq 1,$$

   y $P_{00} = 1 - P_{01} = 2/3$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

4. Un circuito electrónico puede tener dos tipos de fallas. Las fallas tipo A ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa 0.1 por día mientras que las fallas tipo B ocurren de acuerdo a otro proceso de Poisson independiente del proceso anterior y de tasa 0.05 por día. En ambos casos los componentes que producen las fallas tienen componentes iguales conectados en paralelo, de modo que al producirse la falla el componente es reemplazado de manera inmediata y el circuito continua funcionando sin interrupción. Un mecanismo alerta al operador que el fallo se ha producido y éste procede a reemplazar el componente dañado, de modo que al próximo fallo haya un componente listo para funcionar.

   a) Si hace 4 días ocurrió la última falla ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 10 días ocurra al menos una falla?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que ocurre sea de tipo A?

   c) Si durante un período de 10 días ocurren 4 fallas ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas sean de tipo A?

   d) Si durante un período de 10 días ocurren 4 fallas ¿cuál es la probabilidad de que exactamente una de ellas haya ocurrido en los primeros 2 días?

   e) El mecanismo que alerta al operador falla un 10 % de la veces para ambos tipos de falla. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que es detectada sea del tipo B?

5. Los turistas llegan en auto a una ciudad de playa de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad λ y permanecen un tiempo Z con distribución $P(Z \leq t) = G(t)$. El tiempo de permanencia de cada auto es independiente del proceso de llegadas y de los otros tiempos de permanencia. Si se consideran sólo los autos que llegan a partir de un instante fijo $t = 0$, llamamos $X(t)$ al número de autos de turistas que se encuentran en la ciudad en el instante t

   a) Halle la distribución de $X(t)$, $t \geq 0$.

   b) Si $\mu(t) = \mathrm{E}(X(t))$, halle $\lim_{t\to\infty} \mu(t)$.

   c) Halle el valor de $\mu(t)$ si Z tiene distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$.