Nombre: ____________________________________

1	2	3	4	5	T

Modelos Estocásticos I

Segundo Examen Parcial

Viernes 11/11/11, 11 a.m. – 3 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 4 de las siguientes preguntas.

1. a) Demuestre que si i, j son estados de una cadena de Markov y $i \to j$ pero $j \nrightarrow i$, entonces i es un estado transitorio.

   b) Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y la siguiente matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   i) Si la cadena inicia en 1, determine la probabilidad de que nunca visite el estado 2.

   ii) Halle el tiempo promedio para la absorción si la cadena comienza en el estado 3.

2. Considere un proceso de ramificación cuya ley de reproducción está dada por la función de probabilidad $p_k = P(\xi = k) = ap^{k-1}$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$ donde $0 < p < 1$, $0 < a < (1-p)$ y

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - \frac{a}{1-p} = \frac{1-(p+a)}{1-p}.$$

   a) Halle la f. g. p. correspondiente $\phi(s)$ y calcule la media μ de la distribución.

   b) Demuestre que la ecuación $\phi(u) = u$ tiene como raíces positivas 1 y

$$u = \frac{1-(p+a)}{p(1-p)}.$$

   c) Demuestre que la probabilidad de extinción $u_\infty = 1$ si y sólo si $\mu \leq 1$.

3. (a) Considere una cadena de nacimiento y muerte con $p_j > 0$, para $j \geq 0$ y $q_j > 0$ para $j \geq 1$ y suponga que el espacio de estados es $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sea T_0 el instante de la primera visita al estado 0. Demuestre que

$$P_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}$$

donde $\gamma_j = \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{q_i}{p_i}\right)$, $\gamma_0 = 1$.

(b) Considere una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que

$$p_i = \frac{i+2}{2(i+1)}, \quad q_i = \frac{i}{2(i+1)}$$

para $i \geq 0$.

i) Demuestre que todos los estados de esta cadena son transitorios (Ayuda: Use el resultado del inciso (a)).

ii) Calcule $P_i(H_a < H_b)$ para $a < i < b$ y $P_i(T_0 < \infty)$.

4. Una persona juega una serie de juegos con probabilidad de ganar 0.5 y en cada juego puede modificar la cantidad apostada. Si gana, recibe de ganancia una cantidad igual a la que apostó. Su capital inicial es de 2 pesos y quiere lograr 6 pesos, y si lo hace deja de jugar. El jugador decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 3 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital a 6 pesos, en caso de ganar. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, el proceso que denota el capital del jugador después de n lanzamientos.

(a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición.

(b) Halle la probabilidad de que el jugador logre juntar 6 pesos.

(c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital?

5. Sea S_n, $n \geq 1$ un paseo al azar simple, es decir, $S_n = S_0 + \sum_1^n \xi_i$ donde las variables ξ_i son i.i.d. y toman valores 1 y -1 con probabilidades p y $q = 1 - p$, respectivamente.

(a) Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Llamemos $N_n(a, b)$ al número de trayectorias que van de a a b en n pasos. Halle una fórmula para $N_n(a, b)$.

(b) Sea ahora $N_n^0(a, b)$ el número de trayectorias que van de a a b en n pasos pero pasan por 0. Demuestre que para $a, b > 0$ se tiene que $N_n^0(a, b) = N_n(-a, b)$.

(c) Si $b > 0$ calcule la siguiente probabilidad:

$$P(S_n = b, S_k \neq 0 \text{ para } k = 1, \dots, n | S_0 = 0)$$