

Nombre: _____

Modelos Estocásticos I

Primer Examen Parcial

Jueves 9/09/10, 11 a.m. – 2 p.m.

1. Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto $\{x_i = 1 - 2^{-i}, i \geq 1\}$, con probabilidades respectivas $p_i = 2^{-i}$. Describa la función de distribución asociada. Calcule la probabilidad de que la variable tome valores en los intervalos $(1/2, 7/8]$ y $(3/4, 1]$. ¿Cuál es la media y la varianza de esta variable?
2. Sea A el triángulo de vértices $(0, 0); (1, 0); (0, 1)$ y suponga que X, Y tienen densidad conjunta uniforme en el triángulo. (a) Halle las distribuciones marginales de X e Y y la distribución de $Z = X + Y$. (b) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?
3. Sea X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{y} \exp\left\{\frac{x}{y} - y\right\} \quad \text{para } x, y > 0.$$

Halle la densidad condicional de $X|Y = y$. Halle $E(X|Y)$.

4. Felipe lanza un dado balanceado hasta obtener un cuatro, luego Diana lanza una moneda balanceada tantas veces como Felipe lanzó el dado. Sea X el número de águilas que Diana obtiene. Halle la función generadora de probabilidad de X y determine su valor esperado y varianza.
5. (a) Explique cómo funciona el método de rechazo para generar variables aleatorias discretas. Demuestre que el método produce variables con la distribución deseada.
(b) De un algoritmo para simular valores de una variable aleatoria con la siguiente distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{[x+1]} & \text{para } x \geq 1, \end{cases}$$

donde $[a]$ denota el mayor entero que es menor o igual que a .