Capítulo 4

Procesos ARMA

4.1. Modelos Autoregresivos

La idea de estos modelos es que los valores actuales de la serie X_t dependen de los p valores previos: $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$.

Definición 4.1 *Un modelo autoregresivo de orden p, denotado por $AR(p)$, es de la forma*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t \tag{4.1}$$

donde X_t es estacionario, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son constantes ($\phi_p \neq 0$) y w_n es un ruido blanco con media 0 y varianza σ_w^2.

El proceso X_t tiene media 0. Si queremos analizar un proceso Y_t con media $\mu \neq 0$ podemos considerar el proceso $Y_t - \mu$.

Para la definición no es necesario suponer que el ruido blanco tiene una distribución particular, pero más adelante supondremos que el ruido blanco tiene distribución normal.

Una notación muy útil para considerar este tipo de modelos se basa en el uso del operador de retardo B. El modelo $AR(p)$ es

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = w_t \tag{4.2}$$

La ecuación anterior se puede escribir de manera resumida como

$$\phi(B) X_t = w_t$$

Definición 4.2 *El operador autoregresivo se define por*

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p \tag{4.3}$$

Vamos a considerar inicialmente un modelo autoregresivo de primer orden

$$X_t = \phi X_{t-1} + w_t \tag{4.4}$$

Si iteramos esta relación hacia el pasado k veces obtenemos

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + w_t = \phi(\phi X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\ &= \phi^2 X_{t-2} + \phi w_{t-1} + w_t \\ &\vdots \\ &= \phi^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j w_{t-j} \end{aligned}$$

Si continuamos este proceso de iteración hacia el pasado, siempre que $|\phi| < 1$ y X_t sea estacionario, podemos representar un modelo $AR(1)$ como un proceso lineal:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j w_{t-j}. \tag{4.5}$$

El proceso $AR(1)$ definido por (4.5) es estacionario con media

$$\mathrm{E}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \,\mathrm{E}(w_{t-j}) = 0$$

y función de autocovarianza

$$\begin{aligned} \gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) &= \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j w_{t+h-j}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k w_{t-k}\Big)\Big] \\ &= \mathrm{E}[(w_{t+h} + \cdots + \phi^h w_t + \phi^{h+1} w_{t-1} + \cdots)(w_t + \phi w_{t-1} + \cdots)] \\ &= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{h+j}\phi^j = \sigma_w^2 \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \frac{\sigma_w^2 \phi^h}{1-\phi^2}, \quad h \geq 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Recordamos que $\gamma(-h) = \gamma(h)$, de modo que esto define la autocovarianza para todos los valores de h.

Ejemplo 4.1 (La trayectoria de un proceso AR(1))
La figura 4.1 muestra a la izquierda las trayectorias de dos procesos autoregresivos de primer orden

$$X_t = \phi X_{t-1} + w_t$$

con $\phi = 0.9$ (arriba) y $\phi = -0.9$ (abajo). A la derecha se presentan las funciones de autocorrelación respectivas. Se observa que la trayectoria del primer proceso es mucho más regular que la del segundo. Esto se debe a que en el primer caso tenemos una autocorrelación fuerte pero positiva entre valores sucesivos, lo que hace que estos valores estén cercanos. En el segundo caso, en cambio, los valores absolutos de términos consecutivos son cercanos, pero sus signos tienden a alternarse, produciendo trayectorias quebradas.

Las funciones de autocorrelación decaen exponencialmente en ambos casos, pero en el segundo los signos se alternan.

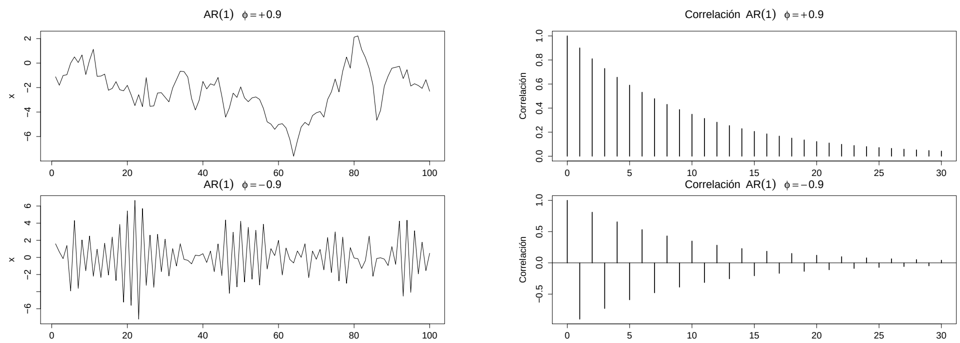

Figura 4.1: Procesos Autoregresivos

Ejemplo 4.2 (El Paseo al Azar y modelos explosivos)
Consideremos un paseo al azar sin deriva

$$X_t = \sum_{j=0}^{t} w_j = X_{t-1} + w_t \quad \text{para } t \geq 0.$$

La ecuación anterior es la ecuación (4.4) con $\phi = 1$. Para que el paseo al azar sea un proceso autoregresivo tenemos que verificar que es estacionario. Pero como vimos anteriormente, la covarianza del paseo al azar es

$$\gamma(s,t) = \mathrm{E}(X_s X_t) = \mathrm{E}\Big(\sum_{j=1}^{s} X_j \sum_{k=1}^{t} X_k\Big) = \min\{s,t\}$$

que no es la covarianza de un proceso estacionario. Por lo tanto no existen procesos autoregresivos de orden 1 con coeficiente $\phi = 1$. Podemos preguntarnos ahora si es posible tener un proceso de este tipo con $\phi > 1$. Estos procesos se conocen como procesos explosivos porque rápidamente crecen en magnitud. Como $|\phi|^j$ tiende a infinito, cuando $j \to \infty$, $\sum_{j=0}^{k} \phi^j w_{t-j}$ no converge (en media cuadrática) cuando $k \to \infty$. Sin embargo, podemos obtener un proceso estacionario de la siguiente manera: Partimos de

$$X_{t+1} = \phi X_t + w_{t+1}$$

y ahora invertimos la relación para obtener

$$\begin{aligned} X_t &= \phi^{-1} X_{t+1} - \phi^{-1} w_{t+1} = \phi^{-1}\big(\phi^{-1} X_{t+2} - \phi^{-1} w_{t-2}\big) - \phi^{-1} w_{t+1} \\ &\ \vdots \\ &= \phi^{-k} X_{t+k} - \sum_{j=1}^{k} \phi^{-j} w_{t+j} \end{aligned}$$

Como $|\phi|^{-1} < 1$ este resultado produce un proceso estacionario $AR(1)$ dependiente del futuro:

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} w_{t+j} \tag{4.7}$$

Es posible verificar que este proceso es estacionario pero el problema desde el punto de vista práctico es que esta representación depende del futuro. Cuando un proceso no depende del futuro, como los procesos autoregresivos de orden 1 que satisfacen $|\phi| < 1$, decimos que el proceso es *causal*.

Ejemplo 4.3
Es posible definir procesos causales equivalentes a los procesos no causales que vimos en el ejemplo anterior si suponemos que el ruido blanco tiene distribución Gaussiana. Por ejemplo, si

$$X_t = \phi X_{t-1} + w_t \quad \text{con } |\phi| > 1$$

y con $w_t \sim iid\mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ entonces a partir de (4.7) vemos que X_t es un proceso Gaussiano estacionario no causal, centrado y con

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) &= \mathrm{Cov}(-\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} w_{t+h+j}, -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} w_{t+k}) \\ &= \frac{\sigma_w^2 \phi^{-2} \phi^{-h}}{1-\phi^{-2}}.\end{aligned}$$

Usando (4.6), el proceso causal definido por

$$Y_t = \phi^{-1} Y_{t-1} + v_t$$

con $v_t \sim iid\mathcal{N}(0, \sigma_w^2 \phi^{-2})$ tiene la misma distribución que el proceso X_t. Por ejemplo, si $X_t = 2X_{t-1} + w_t$ con $\sigma_w^2 = 1$, entonces $Y_t = \frac{1}{2} Y_{t-1} + v_t$ con $\sigma_v^2 = 1/4$ es un proceso causal equivalente.

Una técnica alternativa a la iteración hacia el pasado para obtener el proceso estacionario que es solución a una ecuación autoregresiva es la igualación de coeficientes, que funciona bien con modelos de órdenes superiores. Consideremos un modelo $AR(1)$ escrito en términos del operador autoregresivo:

$$\phi(B) X_t = w_t \tag{4.8}$$

con $\phi(B) = 1 - \phi B$ y $|\phi| < 1$. También consideramos este modelo expresado como un proceso lineal (4.5) pero escrito en la forma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} = \psi(B) w_t \tag{4.9}$$

donde $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ y $\psi_j = \phi^j$.

Supongamos que no sabemos que $\psi_j = \phi^j$ y queremos hallar el valor de ψ_j. Podemos sustituir la expresión (4.9) en (4.8) y obtenemos

$$\phi(B)\psi(B) w_t = w_t \tag{4.10}$$

Los coeficientes a ambos lados de la ecuación deben ser iguales, por lo que

$$(1 - \phi B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots + \psi_j B^j + \cdots) = 1 \tag{4.11}$$

Si reorganizamos los coeficientes en la ecuación (4.11) obtenemos

$$1 + (\psi_1 - \phi)B + (\psi_2 - \psi_1 \phi)B^2 + \cdots + (\psi_j - \psi_{j-1}\phi)B^j + \cdots = 1$$

Igualando los coeficientes de B^j para cada valor de $j \geq 1$ obtenemos $\psi_1 = \phi$, y $\psi_2 = \phi\psi_1 = \phi^2$ y en general

$$\psi_j = \psi_{j-1}\phi$$

con $\psi_0 = 1$, que tiene como solución $\psi_j = \phi^j$.

Otra manera de ver este proceso es considerar el modelo $AR(1)$ en términos de operadores: $\phi(B)X_t = w_t$. Si suponemos que existe el operador inverso $\phi^{-1}(B)$ y multiplicamos ambos lados de la ecuación por él, obtenemos

$$\phi^{-1}(B)\phi(B)X_t = \phi^{-1}(B)w_t$$

o sea

$$X_t = \phi^{-1}(B)w_t. \tag{4.12}$$

Comparando la ecuación (4.12) con (4.9) vemos que

$$\phi^{-1}(B) = \phi(B) = 1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \cdots + \phi^j B^j + \cdots$$

Observamos que los operadores se comportan como polinomios, es decir, si consideramos el polinomio $\phi(z) = 1 - \phi z$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $|\phi| < 1$, entonces

$$\phi^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \phi z} = 1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \cdots + \phi^j z^j + \cdots$$

y vemos que los coeficientes de B^j en $\phi^{-1}(B)$ son los mismos que los de z^j en $\phi^{-1}(z)$.

4.2. Modelos de Promedio Móvil

Definición 4.3 *Un modelo de promedio móvil de orden q ($MA(q)$) es un modelo de la forma*

$$X_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \tag{4.13}$$

donde $\theta_j, j = 1, \dots, q$ son parámetros del modelo con $\theta_q \neq 0$ y w_t es un ruido blanco con varianza σ_w^2.

Este sistema es igual al proceso lineal (4.9) con $\psi_0 = 1, \psi_j = \theta_j$ para $j = 1, \dots, q$ y $\psi_j = 0$ para los demás valores de j. Podemos escribir este proceso como

$$X_t = \theta(B)w_t \tag{4.14}$$

usando la siguiente definición

Definición 4.4 *El operador de promedio móvil es*

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q \tag{4.15}$$

A diferencia de lo que ocurre con el proceso autoregresivo, el proceso de promedio móvil es estacionario para cualesquiera valores de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_q$.

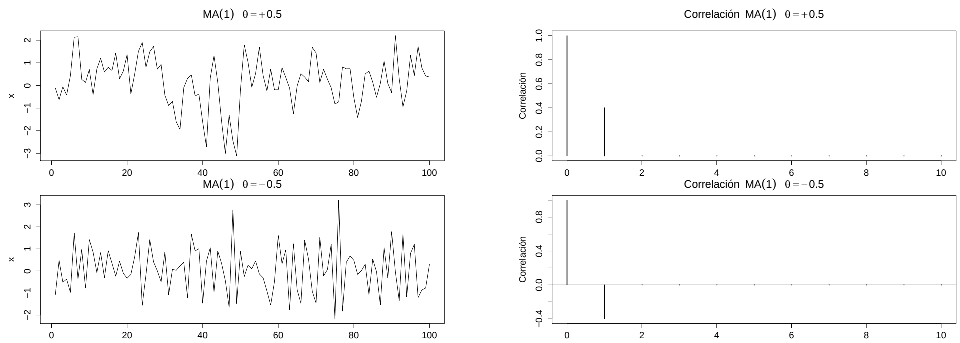

Figura 4.2: Procesos de Promedio Móvil

Ejemplo 4.4
Consideremos el proceso $MA(1)$ $X_t = w_t + \theta w_{t-1}$. Entonces $\mathrm{E}(X_t) = 0$,

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_w^2 & \text{si } h = 0, \\ \theta\sigma_w^2 & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h > 1. \end{cases}$$

y la función de autocorrelación es

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0, \\ \theta/(1+\theta^2) & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h > 1. \end{cases}$$

Observamos que $|\rho(1)| \leq 1/2$ para todo θ.

La figura 4.2 muestra a la izquierda ejemplos de las trayectorias de estos procesos cuando $\theta = 0.5$ (arriba) y $\theta = -0.5$ (abajo). A la derecha se presentan las funciones de correlación respectivas. Observamos que, en contraste con lo que ocurre con procesos autoregresivos, los valores de los procesos de promedio móvil de orden 1 no están correlacionados si el retardo es mayor a 1.

Ejemplo 4.5 (Invertibilidad)
A partir del ejemplo anterior vemos que para un modelo $MA(1)$, $\rho(h)$ es igual si cambiamos θ por $1/\theta$. En el caso de la función de autocovarianza, por ejemplo, el modelo que corresponde a $\sigma_w^2 = 1$ y $\theta = 5$ tiene la misma autocovarianza que el modelo que corresponde a $\sigma_w^2 = 25$ y $\theta = 1/5$, que es

$$\gamma(h) = \begin{cases} 26 & \text{si } h = 0, \\ 5 & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto el proceso $MA(1)$

$$X_t = w_t + \frac{1}{5} w_{t-1}, \qquad w_t \sim iid\mathcal{N}(0, 25)$$

y el proceso

$$Y_t = v_t + 5v_{t-1}, \qquad v_t \sim iid\mathcal{N}(0,1)$$

tienen la misma distribución porque son normales. Como sólo podemos observar los procesos X_t o Y_t y no los ruidos w_t o v_t, no podemos distinguir entre estos dos modelos. Para escoger uno de ellos vamos a preferir el modelo que tenga una representación autoregresiva infinita. Un proceso de este tipo se conoce como un proceso *invertible*.

Para encontrar el modelo invertible podemos intercambiar el papel que juegan X_t y w_t en la definición y escribimos el modelo como $w_t = -\theta w_{t-1} + X_t$. Siguiendo un proceso similar al que usamos para el proceso autoregresivo vemos que si $|\theta| < 1$ entonces $w_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j X_{t-j}$, que es la representación autoregresiva infinita del modelo. En consecuencia, preferimos el modelo con $\sigma_w^2 = 25$ y $\theta = 1/5$ porque es invertible.

4.3. Procesos Autoregresivos de Promedio Móvil

Definición 4.5 *Una serie de tiempo $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso $ARMA(p,q)$ si es estacionario y*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + w_{t-q} \tag{4.16}$$

con $\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$ y $\sigma_w^2 > 0$. Los parámetros p y q se conocen como los órdenes autoregresivo y de promedio móvil, respectivamente. Si X_t tiene media μ distinta de 0, ponemos $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$ y escribimos el modelo como

$$X_t = \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + w_{t-q}. \tag{4.17}$$

Podemos representar un modelo ARMA(p,q) usando los operadores AR y MA de la siguiente manera:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t. \tag{4.18}$$

Ejemplo 4.6 (Sobreparametrización)
Consideremos un proceso de ruido blanco $X_t = w_t$. Podemos escribir esta ecuación de manera equivalente como $0.5X_t = 0.5w_t$ o cambiando el tiempo una unidad como $0.5X_{t-1} = 0.5w_{t-1}$. Si restamos la primera y la última de estas representaciones obtenemos

$$X_t - 0.5X_{t-1} = w_t - 0.5w_{t-1}$$

o sea

$$X_t = 0.5X_{t-1} + w_t - 0.5w_{t-1} \tag{4.19}$$

que parece ser un proceso ARMA(1,1). Por supuesto, el proceso sigue siendo el mismo, un ruido blanco, pero ahora esto no resulta obvio por la sobreparametrización. Podemos escribir la versión sobreparametrizada con los operadores como $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$, o

$$(1 - 0.5B)X_t = (1 - 0.5B)w_t.$$

Aplicamos el operador $\phi(B)^{-1} = (1 - 0.5B)^{-1}$ a ambos lados y obtenemos

$$X_t = (1 - 0.5B)^{-1}(1 - 0.5B)X_t = (1 - 0.5B)^{-1}(1 - 0.5B)w_t = w_t$$

que es el modelo original.

El problema de sobreparametrización se puede detectar fácilmente si escribimos explícitamente la factorización de los operadores o sus polinomios asociados. Tenemos $\phi(z) = (1 - 0.5z)$ y $\theta(z) = (1 - 0.5z)$ y observamos que ambos tienen un factor común, $(1 - 0.5z)$. Este factor común identifica la sobreparametrización y si lo eliminamos obtenemos $\phi(z) = \theta(z) = 1$ y vemos que el modelo adecuado es un ruido blanco.

Los ejemplos anteriores muestran una serie de problemas que se pueden presentar con la definición de los procesos ARMA(p,q):

1. Modelos sobreparametrizados,
2. Modelos estacionarios que dependen del futuro,
3. Modelos de promedio móvil que no son únicos.

Para resolver estos problemas necesitamos algunas restricciones adicionales.

Definición 4.6 *Definimos los polinomios AR y MA por*

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p, \quad \phi_p \neq 0$$

y

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q, \quad \theta_q \neq 0,$$

respectivamente, donde $z \in \mathbb{C}$.

Para resolver el primer problema añadimos una restricción a la definición de los procesos ARMA(p,q): Diremos que un proceso es de este tipo si los polinomios asociados no tienen factores comunes. Para el segundo problema necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.7 *Un proceso ARMA(p,q) es causal si la serie de tiempo* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *se puede escribir como un proceso lineal unilateral:*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} = \psi(B) w_t \tag{4.20}$$

donde $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ *y* $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. *Ponemos* $\psi_0 = 1$.

Proposición 4.1 (Causalidad) *Un modelo ARMA(p,q) es causal si y sólo si* $\phi(z) \neq 0$ *para* $|z| \leq 1$. *Los coeficientes del proceso lineal (4.20) se pueden determinar resolviendo*

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \qquad |z| \leq 1.$$

Otra manera de describir el resultado anterior es decir que un modelo ARMA es causal sólo cuando las raíces de $\phi(z)$ están fuera del círculo unitario, es decir, $\phi(z) = 0$ sólo cuando $|z| > 1$.

Demostración. Supongamos primero que las raíces de $\phi(z)$, digamos $z_1, z_2, \dots, z_p$ están fuera del círculo unitario. Las escribimos en el siguiente orden: $1 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_p|$, observamos que estas raíces no son necesariamente distintas, y ponemos $|z_1| = 1 + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. En consecuencia $\phi(z) \neq 0$ si $|z| < |z_1| = 1 + \varepsilon$ de modo que $\phi^{-1}(z)$ existe y tiene un desarrollo en serie de potencias

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad |z| < 1 + \varepsilon.$$

Escogemos δ de modo que $0 < \delta < \varepsilon$, y ponemos $z = 1 + \delta$, que está dentro del círculo de convergencia. Entonces tenemos que

$$\phi^{-1}(1+\delta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (1+\delta)^j < \infty. \tag{4.21}$$

Por lo tanto podemos acotar cada sumando de (4.21) por una constante $C > 0$: $|a_j(1+\delta)^j| < C$. En consecuencia $|a_j| < C(1+\delta)^{-j}$, de donde obtenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty. \tag{4.22}$$

Por lo tanto $\phi^{-1}(B)$ existe y podemos aplicarlo a ambos lados del modelo ARMA $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$ para obtener

$$X_t = \phi^{-1}(B)\phi(B)X_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)w_t$$

Si ponemos ahora $\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B)$ tenemos

$$X_t = \psi(B)w_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j},$$

donde los pesos ψ_j son absolutamente sumables y se pueden obtener resolviendo $\psi(z) = \phi^{-1}(z)\theta(z)$ para $|z| \leq 1$.

Para ver el recíproco supongamos que X_t es un proceso causal, es decir, que tiene la representación

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

En este caso escribimos $X_t = \psi(B)w_t$ y premultiplicando por $\phi(B)$ obtenemos

$$\phi(B)X_t = \phi(B)\psi(B)w_t \tag{4.23}$$

Adicionalmente el modelo es ARMA y se puede escribir

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t. \tag{4.24}$$

A partir de (4.23) y (4.24) vemos que

$$\phi(B)\psi(B)w_t = \theta(B)w_t. \tag{4.25}$$

Sea

$$a(z) = \phi(z)\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad |z| \leq 1$$

y en consecuencia podemos escribir (4.25) como

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j w_{t-j} = \sum_{j=0}^{q} \theta_j w_{t-j} \tag{4.26}$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de (4.26) por w_{t-h} para $h = 0, 1, 2, \dots$ y tomamos esperanzas obtenemos

$$a_h = \begin{cases} \theta_h, & \text{si } h = 0, 1, \dots, q \\ 0, & \text{si } h > q. \end{cases} \tag{4.27}$$

A partir de (4.27) concluimos que

$$\phi(z)\psi(z) = a(z) = \theta(z), \quad |z| \leq 1. \tag{4.28}$$

Si existe un número complejo z_0 en el círculo unitario tal que $\phi(z_0) = 0$, por (4.28) tendríamos $\theta(z_0) = 0$. Pero entonces $\phi(z)$ y $\theta(z)$ tendrían un factor común, lo que no es posible. Por lo tanto podemos escribir $\psi(z) = \theta(z)/\phi(z)$. Además, por hipótesis tenemos que $|\psi(z)| < \infty$ para $|z| < 1$, y en consecuencia

$$|\psi(z)| = \left|\frac{\theta(z)}{\phi(z)}\right| < \infty, \quad \text{para } |z| < 1. \tag{4.29}$$

■

Ejemplos 4.7

1. El modelo AR(1) $X_t = 0.5X_{t-1} + w_{t-1}$ es causal porque $\phi(z) = 1 - 0.5z$ tiene raíz $z = 2$, que es mayor que 1.

2. El modelo AR(2) $X_t = X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + w_t$ es causal. Para ver esto escribimos el modelo en términos del operador B como

$$\frac{1}{4}(B^2 - 4B + 4)X_t = w_t$$

que equivale a $\frac{1}{4}(B-2)^2 X_t = w_t$. Las raíces del polinomio $\phi(z) = (z-2)^2/4$ son reales e iguales a 2. Como son mayores que 1, el modelo es causal.

3. El modelo $X_t = 0.5X_{t-1} + 0.5X_{t-2} + w_t$ no es causal porque tiene una raíz unitaria. El modelo se puede escribir como

$$-\frac{1}{2}(B^2 + B - 2)X_t = w_t$$

y el polinomio

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}(z^2 + z - 2) = -\frac{1}{2}(z-1)(z+2)$$

tiene raíces $z = 1, -2$. Como hay una raíz unitaria, (aunque la otra sea mayor que 1) el proceso no es causal.

4. El proceso $X_t = -\frac{1}{4}X_{t-2} + w_t$ es causal porque las raíces de $1 + \frac{1}{4}z = 0$ son $z = \pm 2i$, que son números complejos con valor absoluto mayor a 1.

Definición 4.8 *Un modelo ARMA(p,q) es invertible si la serie de tiempo* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *se puede escribir como*

$$\pi(B)X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = w_t \tag{4.30}$$

donde $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$ *y* $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$. *Ponemos* $\pi_0 = 1$.

Proposición 4.2 (Invertiblidad) *Un modelo ARMA(p,q) es invertible si y sólo si* $\theta(z) \neq 0$ *para* $|z| \leq 1$. *Los coeficientes* π_j *de* $\pi(B)$ *en (4.30) se pueden determinar resolviendo*

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\psi(z)}{\theta(z)}, \qquad |z| \leq 1.$$

Otra manera de describir el resultado anterior es decir que un modelo ARMA es invertible sólo cuando las raíces de $\theta(z)$ están fuera del círculo unitario, es decir, $\theta(z) = 0$ sólo cuando $|z| > 1$.

Ejemplo 4.8
Consideremos el proceso

$$X_t = 0.4X_{t-1} + 0.45X_{t-2} + w_t + w_{t-1} + 0.25w_{t-2}$$

o escrito en términos de operadores

$$(1 - 0.4B - 0.45B^2)X_t = (1 + B + 0.25B^2)w_t$$

Este proceso parece ser un ARMA(2,2), pero los polinomios asociados

$$\begin{aligned}\phi(z) &= 1 - 0.4z - 0.45z^2 = (1 + 0.5z)(1 - 0.9z)\\ \theta(z) &= 1 + z + 0.25z^2 = (1 + 0.5z)^2\end{aligned}$$

tienen un factor común que puede cancelarse. Al hacerlo obtenemos un modelo ARMA(1,1) con ecuación

$$(1 - 0.9B)X_t = (1 + 0.5B)w_t$$

o sea

$$X_t = 0.9X_{t-1} + 0.5w_{t-1} + w_t \tag{4.31}$$

Este modelo es causal porque la raíz de $\phi(z) = 1 - 0.9z = 0$ es $z = 10/9 > 1$, que está fuera del círculo unitario. El modelo también es invertible porque la raíz de $\theta(z) = 1 + 0.5z = 0$ es $z = -2$, que también está fuera del círculo unitario.

Para escribir el modelo como un proceso lineal, podemos obtener los coeficientes ψ usando la proposición 4.1: $\phi(z)\psi(z) = \theta(z)$, que es

$$(1 - 0.9z)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots) = 1 + 0.5z.$$

Igualando coeficientes obtenemos $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 0.5 + 0.9 = 1.4$ y $\psi_j = 0.9\psi_{j-1}$ para $j > 1$. Por lo tanto $\psi_j = 1.4(0.9)^{j-1}$ para $j \geq 1$ y (4.31) se puede escribir como

$$X_t = w_t + 1.4 \sum_{j=1}^{\infty} (0.9)^{j-1} w_{t-j}.$$

De manera similar se obtiene la representación invertible usando la proposición 4.2

$$X_t = 1.4 \sum_{j=1}^{\infty} (-0.5)^{j-1} X_{t-j} + w_t.$$

▲

Ejemplo 4.9 (ARMA(1,1))
Veamos como se escribe el desarrollo como proceso lineal de un modelo ARMA(1,1) causal general:

$$X_t - \phi X_{t-1} = w_t + \theta w_{t-1}, \quad |\phi| < 1.$$

Partimos de la ecuación (4.28): $\phi(z)\psi(z) = \theta(z)$ con $\phi(z) = 1 - \phi z$ y $\theta(z) = 1 + \theta z$,

$$\begin{aligned} 1 + \theta z &= (1 - \phi z)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots) \\ &= \psi_0 + (\psi_1 - \phi\psi_0)z + (\psi_2 - \phi\psi_1)z^2 + \cdots \end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos que

$$\psi_0 = 1, \qquad \psi_j = (\phi + \theta)\phi^{j-1} \text{ para } j \geq 1, \tag{4.32}$$

de modo que

$$X_t = w_t + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} w_{t-j}. \tag{4.33}$$

▲

Ejemplo 4.10 (ARMA(p,q))
Consideremos un proceso ARMA(p,q) causal, $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$, donde los ceros de $\phi(z)$ están fuera del círculo unitario. Sabemos que en este caso

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}, \tag{4.34}$$

y podemos determinar los coeficientes ψ_j a partir de la proposición 4.1.

En general, para obtener los coeficientes ψ_j es necesario igualar los coeficientes en la ecuación $\phi(z)\psi(z) = \theta(z)$:

$$(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots)$$

Los primeros valores son

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1\\
\psi_1 - \phi_1\psi_0 &= \theta_1\\
\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 &= \theta_2\\
\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 &= \theta_3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

donde ponemos $\phi_j = 0$ para $j > p$ y $\theta_j = 0$ para $j > q$. Las constantes ψ_j satisfacen la siguiente ecuación en diferencias homogénea

$$\psi_j - \sum_{k=1}^{p} \phi_k\psi_{j-k} = 0, \quad j \geq \text{máx}(p, q+1), \tag{4.35}$$

con condiciones iniciales

$$\psi_j - \sum_{k=1}^{j} \phi_k\psi_{j-k} = \theta_j, \quad 0 \leq j < \text{máx}(p, q+1), \tag{4.36}$$

La solución general depende de las raíces del polinomio autoregresivo $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ y la solución específica dependerá de las condiciones iniciales.

Como ejemplo numérico consideremos el proceso ARMA dado por la ecuación (4.31): $X_t = 0.9X_{t-1} + 0.5w_{t-1} + w_t$. En este caso $\text{máx}(p, q+1) = 2$, a partir de (4.36) obtenemos $\psi_0 = 1$ y $\psi_1 = 0.9 + 0.5 = 1.4$. Por (4.35), para $j \geq 2$ las constantes ψ satisfacen la ecuación $\psi_j - 0.9\psi_{j-1} = 0$, que tiene solución general $\psi_j = C(0.9)^j$. Para hallar una solución particular usamos la condición inicial $\psi_1 = 1.4$, de donde $1.4 = 0.9C$ o $C = 1.4/0.9$. Finalmente $\psi_j = 1.4(0.9)^{j-1}$ para $j \geq 1$, como habíamos visto anteriormente. ▲

4.4. Autocovarianza de un proceso ARMA

Vamos a considerar tres métodos para calcular la función de autocovarianza de un proceso ARMA causal X_t.

Primer Método

Consideramos la representación del proceso como un proceso lineal X_t definido por $X_t = \psi(B)w_t$. Su función de autocovarianza es

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \text{E}(X_t X_{t+h})\\
&= \text{E}(w_t + \psi_1 w_{t-1} + \psi_2 w_{t-2} + \cdots)(w_{t+h} + \psi_1 w_{t+h-1} + \psi_2 w_{t+h-2} + \cdots)\\
&= \sigma_w^2(\psi_h + \psi_1\psi_{h+1} + \psi_2\psi_{h+2} + \cdots)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Ejemplo 4.11 (MA(q))
En el caso de un proceso MA(q) la ecuación que define el proceso es $X_t = \theta(B)w_t$ y sólo hay un número finito de coeficientes distintos de cero, por lo que la función de autocovarianza es

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j\theta_{j+h} & \text{si } h \leq q,\\ 0 & \text{si } h > q. \end{cases}$$

En el caso de un proceso ARMA la ecuación que define el proceso es $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$. Para obtener γ calculamos ψ y luego usamos

$$\gamma(h) = \sigma_w^2(\psi_h + \psi_1\psi_{h+1} + \psi_2\psi_{h+2} + \cdots) \tag{4.38}$$

Ejemplo 4.12 (ARMA(1,1))
Para un proceso definido por

$$X_t - \phi X_{t-1} = w_t - \theta w_{t-1}, \quad |\phi| < 1,$$

combinando las ecuaciones (4.32) y (4.37) obtenemos

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sigma_w^2\big(1 + (\theta+\phi)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\big) \\
&= \sigma_w^2\big(1 + \frac{(\theta+\phi)^2}{1-\phi^2}\big), \\
\gamma(1) &= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\psi_{j+1} = \sigma^2\big(\theta + \phi + (\theta+\phi)^2\phi \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\big) \\
&= \sigma_w^2\big(\theta + \phi + \frac{(\theta+\phi)^2\phi}{1-\phi^2}\big) \\
&= \sigma_w^2\big(\frac{(\theta+\phi)(1+\theta\phi)}{1-\phi^2}\big),
\end{aligned}$$

y

$$\gamma(h) = \phi^{h-1}\gamma(1), \quad h \geq 2.$$

Como caso particular consideremos el proceso ARMA(1,1) dado por la ecuación (4.37):

$$X_t - 0.9X_{t-1} = w_t + 0.5w_{t-1}$$

En el ejemplo 4.8 vimos que la representación de este modelo como proceso lineal tiene coeficientes $\psi_0 = 1, \psi_1 = 1.4, \psi_j = 1.4(0.9)^{j-1}$ para $j \geq 1$.

Usando la ecuación (4.38) obtenemos que

$$\gamma(0) = \sigma_w^2(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2) = \sigma_w^2(1 + (1.4)^2 \sum_{j=0}^{\infty} (0.9)^2) = \sigma_w^2 \frac{(1.4)^2}{(0.19)^2} = \frac{196}{19}\sigma_w^2,$$

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \sigma_w^2(\psi_1 + \psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_3 + \cdots) = \sigma_w^2(\psi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j\psi_{j+1}) \\
&= \sigma_w^2(1.4 + \sum_{j=1}^{\infty} (1.4)^2(0.9)^{2j-1}) = \sigma_w^2(1.4 + (1.4)^2(0.9) \sum_{j=0}^{\infty} (0.9)^{2j}) \\
&= \sigma_w^2\Big(1.4 + \frac{(1.4)^2(0.9)}{1-(0.9)^2}\Big)
\end{aligned}$$

y

$$\gamma(h) = \phi^{h-1}\gamma(1), \quad h \geq 2.$$

▲

Segundo Método

Una manera alternativa de hacer esto es la siguiente:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

multiplicamos por X_{t-h} y tomamos valor esperado

$$\mathrm{E}((X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p})X_{t-h}) = \mathrm{E}((w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q})X_{t-h})$$

y usando el desarrollo $X_{t-h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-h-j}$

$$\begin{aligned}\gamma(h) - \phi_1\gamma(h-1) - \cdots - \phi_p\gamma(h-p) &= \mathrm{E}(\theta_h w_{t-h} X_{t-h} + \cdots + \theta_q w_{t-q} X_{t-h}) \\ &= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_{h+j}\psi_j. \end{aligned} \tag{4.39}$$

que es una ecuación en diferencias.

A partir de (4.39) podemos escribir una ecuación homogénea general para la función de autocorrelación de un proceso ARMA causal

$$\gamma(h) - \phi_1\gamma(h-1) - \cdots - \phi_p\gamma(h-p) = 0, \qquad h \geq \text{máx}\{p,q\} \tag{4.40}$$

con condiciones iniciales

$$\gamma(h) - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma(h-j) = \sigma_w^2 \sum_{j=h}^{q} \theta_j \psi_{j-h}, \qquad 0 \leq h < \text{máx}\{p,q\}. \tag{4.41}$$

En la próxima sección veremos cómo se resuelven estas ecuaciones en general.

Ejemplo 4.13
Consideremos el modelo ARMA(2,1) definido por la ecuación

$$(1 + 0.25B^2)X_t = (1 + 2B)w_t \tag{4.42}$$

Los polinomios asociados son

$$\phi(z) = 1 + 0.25z^2 = \frac{1}{4}(z^2+4) = \frac{1}{4}(z+2i)(z-2i),$$

y

$$\theta(z) = 1 + 2z = 2\big(z + \frac{1}{2}\big).$$

Como los polinomios ϕ y θ no tienen factores comunes y las raíces de los polinomios están fuera del círculo unitario, X_t es un proceso ARMA(2,1).

Las raíces de ϕ son $\pm 2i$ y están fuera del círculo unitario, de modo que X_t es causal. La raíz de θ es $-1/2$, que está dentro del círculo unitario, y por lo tanto el proceso no es invertible.

Para usar el primer método escribimos el proceso como $X_t = \psi(B)w_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j w_{t-j}$ y obtenemos la siguiente relación entre los polinomios:

$$\begin{aligned} 1 + 0.2B &= (1 + 0.25B^2)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) \\ &= \psi_0 + \psi_1 B + (0.25\psi_0 + \psi_2)B^2 + (0.25\psi_1 + \psi_3)B^3 + \cdots \end{aligned}$$

de donde obtenemos las ecuaciones

$$\psi_0 = 1, \qquad \psi_1 = 0.2, \qquad \psi_2 + 0.25\psi_0 = 0, \qquad \psi_3 + 0.25\psi_1 = 0, \dots$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \frac{1}{5}, \quad \psi_2 = -\frac{1}{4}, \quad \psi_3 = -\frac{1}{20}, \quad \psi_4 = \frac{1}{16}, \quad \psi_5 = \frac{1}{80}, \dots$$

Para el segundo método la ecuación (4.39) es

$$\gamma(h) - \phi_1\gamma(h-1) - \phi_2\gamma(h) = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_{h+j}\psi_j$$

que en este caso es

$$\gamma(h) + 0.25\gamma(h-2) = \begin{cases} \sigma_w^2(\psi_0 + 0.25\psi_1) & \text{si } h = 0, \\ 0.25\sigma_w^2\psi_0 & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, tenemos la ecuación en diferencias homogénea

$$\gamma(h) + 0.25\gamma(h-2) = 0 \tag{4.43}$$

para $h \geq 2$ con condiciones iniciales

$$\gamma(0) + 0.25\gamma(-2) = \sigma_w^2(1 + 1/25), \qquad \gamma(1) + 0.25\gamma(-1) = \sigma_w^2/5. \tag{4.44}$$

y podemos usar la teoría de ecuaciones lineales en diferencias para determinar γ, como veremos en la próxima sección. Terminaremos de resolver este problema cuando tengamos esas herramientas a nuestra disposición. ▲

4.5. Ecuaciones en Diferencia

Presentamos en esta sección algunos resultados elementales sobre las ecuaciones en diferencia y sus soluciones.

Comenzamos con una sucesión de números $u_0, u_1, u_2, \dots$ tales que

$$u_n - \alpha u_{n-1} = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.45}$$

Esta es una ecuación en diferencias homogénea de orden 1. Para resolverla escribimos

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha u_0 \\ u_2 &= \alpha u_1 = \alpha^2 u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha u_{n-1} = \alpha^n u_0. \end{aligned}$$

Si tenemos una condición inicial $u_0 = C$ podemos obtener una solución de (4.45): $u_n = C\alpha^n$.

La ecuación (4.45) se escribe en términos de operadores como $(1-\alpha B)u_n = 0$, cuyo polinomio asociado es $\alpha(z) = 1 - \alpha z$. La raíz de este polinomio, que llamamos z_0, es $z_0 = 1/\alpha$, es decir, $\alpha(z_0) = 0$. Sabemos que la solución de (4.45) con condición inicial $u_0 = C$ es

$$u_n = C\alpha^n = C(z_0^{-1})^n \tag{4.46}$$

es decir, la solución a la ecuación en diferencias (4.45) depende sólo de la condición inicial y el recíproco de la raíz del polinomio asociado $\alpha(z)$.

Ejemplo 4.14 (ARMA(1,1))
Consideramos un proceso ARMA(1,1) $X_t = \phi X_{t-1} + w_t + \theta w_{t-1}$ donde $|\phi| < 1$. A partir de las ecuaciones (4.40) y (4.41) vemos que la función de autocovarianza satisface la ecuación

$$\gamma(h) - \phi\gamma(h-1) = 0, \qquad h \geq 2,$$

y por lo anterior vemos que la solución es

$$\gamma(h) = C\phi^h, \qquad h \geq 1. \tag{4.47}$$

Las condiciones iniciales están dadas por

$$\gamma(0) = \sigma_w^2 \frac{1 + 2\theta\phi + \theta^2}{1 - \phi^2} \quad \text{y} \quad \gamma(1) = \sigma_w^2 \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{(1-\phi^2)}.$$

A partir de (4.41) vemos que C está dada por $C = \gamma(1)/\phi$, y la función de covarianza está dada por

$$\gamma(h) = \frac{\gamma(1)}{\phi}\phi^h = \sigma_w^2 \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{(1-\phi^2)}\phi^{h-1}.$$

que es el resultado que obtuvimos en el ejemplo 4.11

Finalmente, dividiendo por $\gamma(0)$ obtenemos función de autocorrelación

$$\rho(h) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{(1-2\theta\phi+\theta^2)}\phi^{h-1}, \quad h \geq 1.$$

▲

Consideremos ahora la ecuación en diferencias homogénea de orden 2

$$u_n - \alpha_1 u_{n-1} - \alpha_2 u_{n-2} = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{4.48}$$

El polinomio correspondiente es

$$\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2,$$

que tiene dos raíces que llamamos z_1 y z_2, es decir, $\alpha(z_1) = \alpha(z_2) = 0$. Consideramos dos casos. Suponemos inicialmente que $z_1 \neq z_2$. La solución general de (4.48) es

$$u_n = C_1 z_1^{-n} + C_2 z_2^{-n}, \tag{4.49}$$

Es sencillo verificar que (4.49) es solución de (4.48) por sustitución.

Dadas dos condiciones iniciales u_0 y u_1, podemos obtener las constantes C_1 y C_2 a partir de

$$u_0 = C_1 + C_2 \qquad \text{y} \qquad u_1 = C_1 z_1^{-1} + C_2 z_2^{-1}$$

Si las raíces del polinomio son iguales, $z_1 = z_2 = z_0$, la solución general de (4.48) es

$$u_n = z_0^n (C_1 + C_2 n). \tag{4.50}$$

Es posible verificar por sustitución que (4.50) es solución de (4.48). Finalmente, si tenemos dos condiciones iniciales u_0 y u_1, podemos obtener C_1 y C_2 resolviendo las ecuaciones

$$u_0 = C_1 \quad \text{y} \quad u_1 = (C_1 + C_2) z_0^{-1}.$$

Ejemplo 4.15
Consideremos un proceso AR(2) causal $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + w_t$. Si multiplicamos ambos lados por X_{t-h} para $h > 0$ y tomamos esperanza

$$\mathrm{E}(X_t X_{t-h}) = \phi_1 \mathrm{E}(X_{t-1} X_{t-h}) + \phi_2 \mathrm{E}(X_{t-2} X_{t-h}) + \mathrm{E}(w_t X_{t-h})$$

obtenemos

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2), \quad h \in \mathbb{N} \tag{4.51}$$

donde usamos el hecho de que $\mathrm{E}(X_t) = 0$ y que para $h > 0$,

$$\mathrm{E}(w_t X_{t-h}) = \mathrm{E}\big(w_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-h-j}\big) = 0.$$

Dividimos (4.51) por $\gamma(0)$ para obtener la ecuación en diferencias para la función de autocorrelación del proceso:

$$\rho(h) - \phi_1 \rho(h-1) - \phi_2 \rho(h-2) = 0, \quad h \in \mathbb{N}. \tag{4.52}$$

Las condiciones iniciales son $\rho(0) = 1$ y $\rho(-1) = \phi_1/(1 - \phi_2)$, que se obtiene a partir de (4.52) con $h = 1$, observando que $\rho(1) = \rho(-1)$.

Usando los resultados para la ecuación en diferencias homogénea de orden 2, sean z_1 y z_2 las raíces del polinomio asociado $\phi(z) = 1 - \phi_1 z + \phi_2 z^2$. Como el modelo es causal, sabemos que las raíces caen fueran del círculo unitario: $|z_1| > 1, |z_2| > 1$. Consideramos ahora los tres posibles casos que se pueden presentar con estas raíces.

1. Si z_1 y z_2 son reales y distintas entonces

   $$\rho(h) = C_1 z_1^{-h} + C_2 z_2^{-h}$$

   de modo que $\rho(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ con velocidad exponencial.

2. Cuando las raíces son reales e iguales, que denotaremos z_0, tenemos

   $$\rho(h) = z_0^{-h}(C_1 + C_2 h),$$

   y de nuevo $\rho(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ con velocidad exponencial.

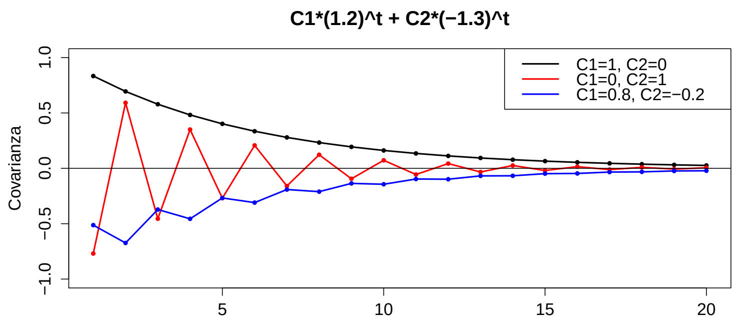

Figura 4.3: Raíces reales distintas.

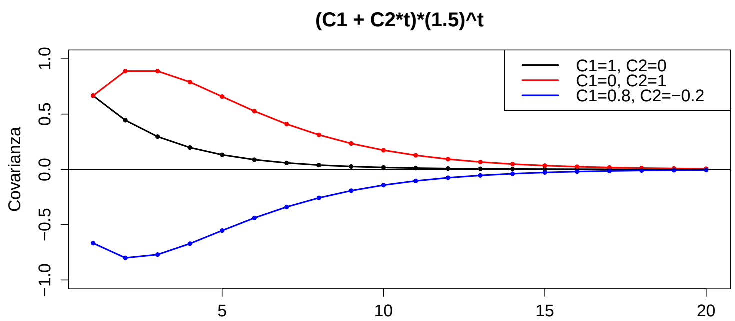

Figura 4.4: Raíces reales iguales.

3. Si las raíces son complejas conjugadas $z_1 = \overline{z}_2$, como $\rho(h)$ es una función real, necesariamente $C_2 = \overline{C}_1$ y poniendo C en lugar de C_1 y z en lugar de z_1

$$\rho(h) = Cz^{-h} + \overline{C}\overline{z}^{-h}.$$

Escribimos C y z en coordenadas polares: $z = |z|e^{i\alpha}, C = |C|e^{i\beta}$ y tenemos

$$\begin{aligned}\rho(h) &= Cz^{-h} + \overline{C}\overline{z}^{-h} = |C||z|^{-h}e^{i(\beta-h\alpha)} + |C||z|^{-h}e^{-i(\beta-h\alpha)} \\ &= a|z|^{-h}\cos(\alpha h + b)\end{aligned}$$

donde a y b se determinan a partir de las condiciones iniciales. De nuevo, $\rho(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ con velocidad exponencial, pero lo hace oscilando.

▲

La ecuación en diferencias homogénea de orden p general:

$$u_n - \alpha_1 u_{n-1} - \cdots - \alpha_p u_{n-p} = 0, \quad \alpha_p \neq 0,\ n \geq p \tag{4.53}$$

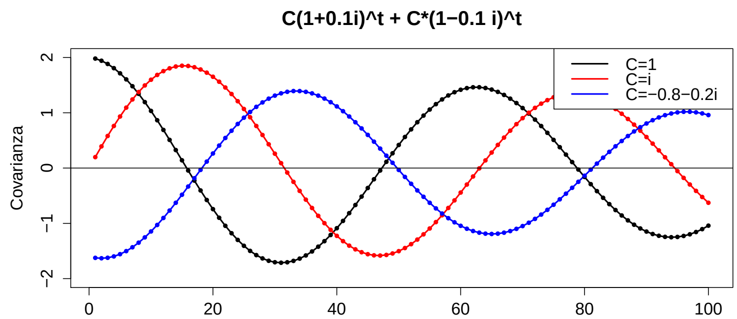

Figura 4.5: Raíces complejas conjugadas.

tiene polinomio asociado

$$\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p.$$

Supongamos que α tiene r raíces distintas, z_1 con multiplicidad m_1, z_2 con multiplicidad m_2, $\ldots$, y z_r con multiplicidad m_r, de modo que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = p$. La solución general de la ecuación en diferencias (4.53) es

$$u_n = z_1^{-n} P_1(n) + z_2^{-n} P_2(n) + \cdots + z_r^{-n} P_r(n), \tag{4.54}$$

donde $P_j(n)$ para $j = 1, 2, \ldots, r$ es un polinomio en n de grado $m_j - 1$. Dadas p condiciones iniciales $u_0, \ldots, u_{p-1}$ podemos obtener los polinomios de manera explícita.

4.6. Autocovarianza de un proceso ARMA (continuación)

Vamos a terminar de resolver el ejemplo 4.13. Recordemos que el segundo método propuesto en la sección 4.4 consiste en multiplicar la ecuación $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$ por X_{t+h} y luego tomar esperanzas, con lo que se obtiene la ecuación (4.39) y a partir de ella la ecuación homogénea (4.40) con condiciones iniciales (4.41). Resolvemos ahora la ecuación homogénea y usamos las condiciones iniciales para obtener las constantes necesarias.

En el ejemplo la ecuación homogénea es

$$\gamma(h) = \frac{1}{4}\gamma(h-2) = 0, \quad h \geq 2,$$

con polinomio característico

$$1 + \frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{4}(4 + z^2) = \frac{1}{4}(z - 2i)(z + 2i),$$

que tiene raíces $z = 2i = 2e^{i\pi/2}, \overline{z} = -2i = 2e^{-i\pi/2}$. La solución general es de la forma

$$\gamma(h) = Cz^{-h} + \overline{C}\overline{z}^{-h}.$$

Escribiendo la constante C en notación polar $C = |C|e^{i\alpha}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= Cz^{-h} + \overline{C}\overline{z}^{-h} \\ &= 2^{-h}\Big(|C|e^{i(\alpha - h\pi/2)} + |C|e^{i(-\alpha + h\pi/2)}\Big) \\ &= C_1 \cos(\frac{h\pi}{2} - \alpha).\end{aligned}$$

Obtenemos las constantes C_1 y α a partir de las condiciones iniciales

$$\gamma(0) + 0.25\gamma(-2) = \sigma_w^2(1 + 1/25), \qquad \gamma(1) + 0.25\gamma(-1) = \sigma_w^2/5.$$

Tenemos $\gamma(0) = C_1 \cos\alpha$, $\gamma(1) = (C_1/2)\operatorname{sen}\alpha$ y $\gamma(2) = -(C_1/4)\cos\alpha$. Sustituyendo estas relaciones en la ecuación anterior obtenemos las constantes C_1 y α.

Tercer Método

La función de autocovarianza también puede obtenerse resolviendo las primeras p ecuaciones de (4.39) para obtener $\gamma(0), \dots, \gamma(p)$ y luego usar las siguientes ecuaciones para $\gamma(p+1), \gamma(p+2), \dots$. Este método es útil para cálculos numéricos.

La Función de Autocorrelación

La función de autocorrelación (ACF) de una serie de tiempo la hemos definido en términos de la función de autocovarianza como

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

De manera similar para un conjunto de observaciones $\{x_1, \dots, x_n\}$ la función de autocorrelación empírica $\hat\rho(h)$ se define como

$$\hat\rho(h) = \frac{\hat\gamma(h)}{\hat\gamma(0)}.$$

Si tenemos observaciones $x_1, \dots, x_n$ de una serie de tiempo, un posible enfoque para ajustar un modelo es usar la ACF empírica y buscar un modelo que tenga una ACF similar a la observada. En particular si la ACF muestral es significativamente diferente de 0 para $0 \le h \le q$ y es 'pequeña' para $h > q$, los resultados del ejemplo 4.11 sugieren que un modelo MA(q) puede ser adecuado para los datos. Sin embargo, hay que tener en cuenta la variación aleatoria presente en la ACF muestral para decidir que quiere decir 'pequeña'.

Para esto podemos usar el hecho de que para una muestra grande de un proceso MA(q), los valores muestrales de la ACF para retardos mayores a q tienen distribución aproximadamente normal con medias 0 y varianzas

$$\frac{w_{hh}}{n} = \frac{1 + 2\rho^2(1) + \cdots + 2\rho^2(q)}{n}$$

de modo que para $h > q$ aproximadamente 95 % de los valores deberían caer en el intervalo $\pm 1.96\sqrt{w_{hh}/n}$.

4.7. Autocorrelación Parcial

Hemos visto que para un proceso de promedio móvil MA(q), la función de autocorrelación se anula para retardos mayores que q, y como $\theta_q \neq 0$, se tiene que $\rho(q) \neq 0$. Por lo tanto, la ACF nos da mucha información sobre la estructura de dependencia de un proceso MA. Sin embargo, para un proceso AR hemos visto que la ACF no se anula y por lo tanto no tenemos la misma información en este caso. Por esta razón es útil considerar otra función que nos permita analizar la estructura de dependencia de un proceso AR. Esta función se conoce como la autocorrelación parcial (PACF).

Para motivar la definición consideremos un modelo AR(1) causal $X_t = \phi X_{t-1} + w_t$. Tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_X(2) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = \mathrm{Cov}(\phi X_{t-1} + w_t, X_{t-2}) \\ &= \mathrm{Cov}(\phi^2 X_{t-2} + \phi w_{t-1} + w_t, X_{t-2}) = \phi^2 \gamma_X(0).\end{aligned}$$

Este resultado se obtiene a partir de la causalidad, porque X_{t-2} depende de $w_{t-2}, w_{t-3}, \dots$, que no están correlacionadas con w_t y w_{t-1}. La correlación entre X_t y X_{t-2} no es cero porque X_t depende de X_{t-2} a través de X_{t-1}. Podemos romper esta cadena de dependencia si eliminamos el efecto de X_{t-1}, es decir, consideramos la correlación entre $X_t - \phi X_{t-1}$ y $X_{t-2} - \phi X_{t-1}$, lo cual elimina la dependencia lineal que ambos términos tienen de X_{t-1}. De esta manera se rompe la cadena de dependencia:

$$\mathrm{Cov}(X_t - \phi X_{t-1}, X_{t-2} - \phi X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(w_t, X_{t-2} - \phi X_{t-1}) = 0.$$

Para definir formalmente la PACF para series de tiempo centradas llamemos $\hat{X}_{t+h}$ para $h \geq 2$ la regresión de X_{t+h} sobre $\{X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_{t+1}\}$ que escribimos como

$$\hat{X}_{t+h} = \beta_1 X_{t+h-1} + \beta_2 X_{t+h-2} + \cdots + \beta_{h-1} X_{t+1} \tag{4.55}$$

Llamemos también $\hat{X}_t$ la regresión de X_t sobre $\{X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}\}$ entonces

$$\hat{X}_t = \beta_1 X_{t+1} + \beta_2 X_{t+2} + \cdots + \beta_{h-1} X_{t+h-1} \tag{4.56}$$

Los coeficientes $\beta_1, \dots, \beta_{h-1}$ resultan ser los mismos por estacionaridad.

Definición 4.9 *La función de autocorrelación parcial (PACF) de un proceso estacionario X_t, que denotamos por ϕ_{hh} para $h = 1, 2, \dots$ es*

$$\phi_{11} = \mathrm{Cor}(X_{t+1}, X_t) = \rho(1)$$

y

$$\phi_{hh} = \mathrm{Cor}(X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}, X_t - \hat{X}_t), \quad h \geq 2$$

Ni $X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}$ ni $X_t - \hat{X}_t$ están correlacionados con $\{X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_{t+1}\}$. La PACF, ϕ_{hh} es la correlación entre X_{t+h} y X_t cuando se ha eliminado la dependencia de cada una de ellas en $\{X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_{t+1}\}$. Si el proceso es Gaussiano entonces

$$\phi_{hh} = \mathrm{Cor}(X_{t+h}, X_t | X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}),$$

es decir, es la correlación entre X_{t+h} y X_t condicional a $\{X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_{t+1}\}$.

Ejemplo 4.16 (AR(1))
Consideremos un proceso AR(1) definido por la relación $X_t = \phi X_{t-1} + w_t$ con $|\phi| < 1$. Por definición, $\phi_{11} = \rho(1) = \phi$. Para calcular ϕ_{22} consideramos la regresión de X_{t+2} sobre X_{t+1}, $\hat{X}_{t+2} = \beta X_{t+1}$. Escogemos β de modo de minimizar

$$\mathrm{E}(X_{t+1} - \hat{X}_{t+2})^2 = \mathrm{E}(X_{t+2} - \beta X_{t+1})^2 = \gamma(0) - 2\beta\gamma(1) + \beta^2\gamma(0).$$

Derivando respecto a β e igualando a 0 obtenemos $\beta = \gamma(1)/\gamma(0) = \phi$. Ahora consideramos la regresión de X_t sobre X_{t+1}, que llamamos $\hat{X}_t = \alpha X_{t+1}$. Escogemos α de modo de minimizar

$$\mathrm{E}(X_t - \hat{X}_t)^2 = \mathrm{E}(X_t - \alpha X_{t+1})^2 = \gamma(0) - 2\alpha\gamma(1) + \alpha^2\gamma(0),$$

y esta es la misma ecuación anterior, de modo que $\alpha = \beta = \phi$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi_{22} &= \mathrm{Cor}(X_{t+2} - \hat{X}_{t+2}, X_t - \hat{X}_t) = \mathrm{Cor}(X_{t+2} - \phi X_{t+1}, X_t - \phi X_{t+1}) \\ &= \mathrm{Cor}(w_{t+2}, X_t - \phi X_{t+1}) = 0\end{aligned}$$

por la causalidad. Por lo tanto $\phi_{22} = 0$. ▲

Ejemplo 4.17 (AR(p))
Consideremos ahora un modelo AR(p), con ecuación

$$X_{t+h} = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t+h-j} + w_{t+h}$$

y suponemos que las raíces de $\phi(z)$ caen fuera del círculo unitario. Si $h > p$, la regresión de X_{t+h} sobre $\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}$ es

$$\hat{X}_{t+h} = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t+h-j}$$

(esto lo probaremos más adelante). Por lo tanto cuando $h > p$,

$$\phi_{pp} = \mathrm{Cor}(X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}, X_t - \hat{X}_t) = \mathrm{Cor}(w_{t+h}, X_t - \hat{X}_t) = 0$$

porque, por causalidad, $X_t - \hat{X}_t$ depende sólo de $\{w_{t+h-1}, w_{t+h-2}, \dots\}$. Cuando $h \leq p$, ϕ_{pp} no es cero y $\phi_{11}, \dots, \phi_{p-1,p-1}$ no son necesariamente nulos. Veremos más adelante que $\phi_{pp} = \phi_p$. ▲

Ejemplo 4.18 (MA(q))
Para un proceso MA(q) invertible podemos escribir $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + w_t$ y no hay una representación finita para este proceso. A partir de esta ecuación vemos que la PACF nunca se va a anular, como en el caso de un AR(p).

Para un MA(1), $X_t = w_t + \theta w_{t-1}$, con $|\theta| < 1$ y con un cálculo similar al que hicimos para el proceso AR(1) obtenemos $\phi_{22} = -\theta^2/(1 + \theta^2 + \theta^4)$. Para este proceso se puede demostrar que

$$\phi_{hh} = -\frac{(-\theta)^h(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(h+1)}}$$

▲

Es posible demostrar que la PACF ϕ_{hh} es la última componente de

$$\phi_h = \Gamma_h^{-1}\gamma_h, \tag{4.57}$$

con $\Gamma_h = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^h$ y $\gamma_h = (\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(h))'$.

Si tenemos un conjunto de observaciones $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_i \neq x_j$ para algún par de índices i, j, la función de autocorrelación parcial empírica $\hat{\alpha}(h)$ está dada por $\hat{\alpha}(0) = 1$ y $\hat{\alpha}(h) = \hat{\phi}_{hh}$ con $h \geq 1$, donde $\hat{\phi}_{hh}$ es la última componente de

$$\hat{\phi}_h = \hat{\Gamma}_h^{-1}\hat{\gamma}_h. \tag{4.58}$$

Esta PACF empírica debería reflejar las propiedades de la PACF del modelo. En particular, si la PACF empírica $\hat{\alpha}(h)$ es significativamente diferente de 0 para $0 \leq h \leq p$ y es 'pequeña' para $h > p$, esperaríamos que un modelo AR(p) pueda ser adecuado para estos datos. Para decidir cuando un valor es 'pequeño' podemos usar el hecho de que para un proceso AR(p), la PACF empírica para retardos mayores que p son variables aproximadamente independientes con distribución $\mathcal{N}(0, 1/n)$. Esto quiere decir que aproximadamente un 95 % de la PACF muestral más allá del retardo p deben estar dentro de la banda $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Si observamos una PACF empírica que satisface

$$|\hat{\alpha}(h)| > \frac{1.96}{\sqrt{n}} \text{ para } 0 \leq h \leq p \quad \text{y} \quad |\hat{\alpha}(h)| < \frac{1.96}{\sqrt{n}} \text{ para } h > p$$

es razonable intentar ajustar un modelo AR(p) a los datos.