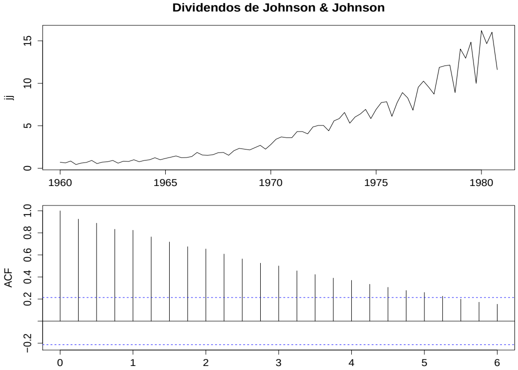
Series de Tiempo

Semana 3

Esquema

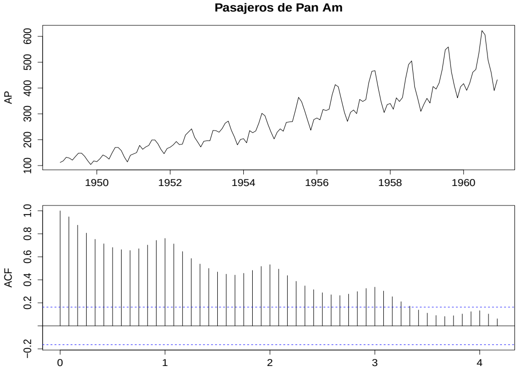
Esquema

Correlaciones



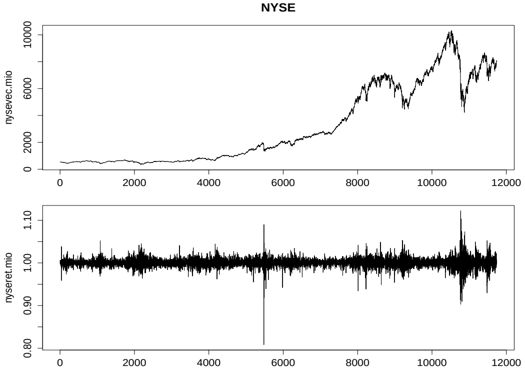
ACF para la serie de dividendos de Johnson & Johnson.

Correlaciones



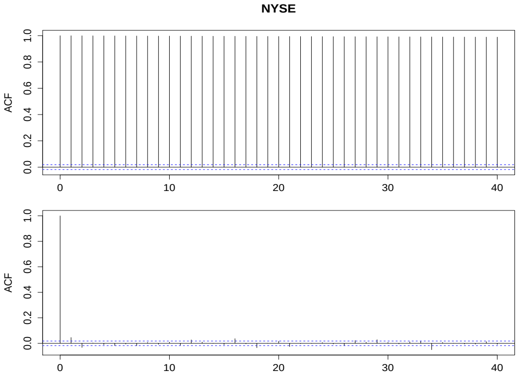
ACF para la serie de pasajeros de Pan Am.

Correlaciones



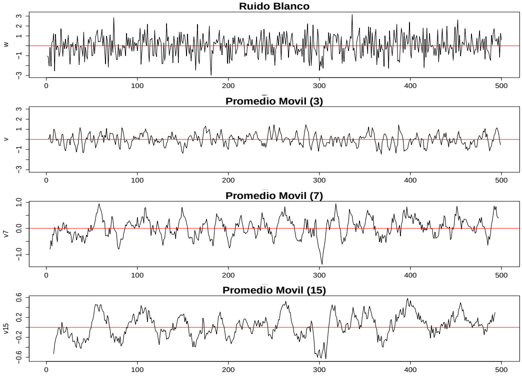
Indice del NYSE y *returns*.

Correlaciones



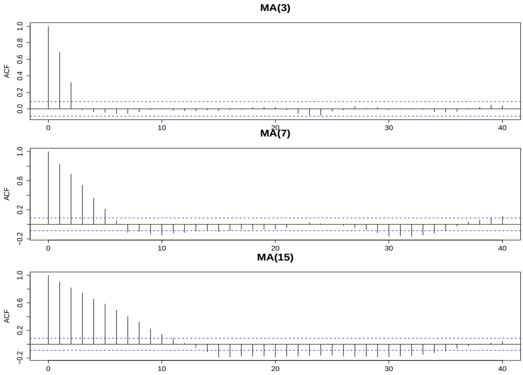
ACF para el índice del NYSE y *returns*.

Correlaciones



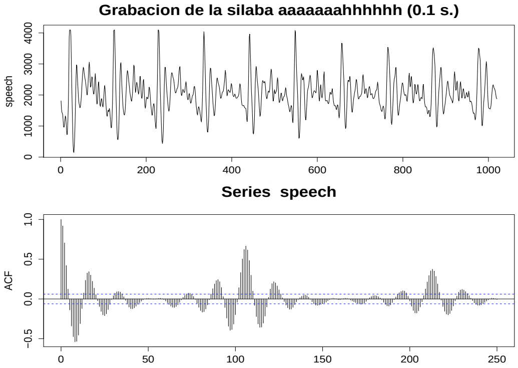
Promedio Movil con 3, 7 y 15 datos.

Correlaciones



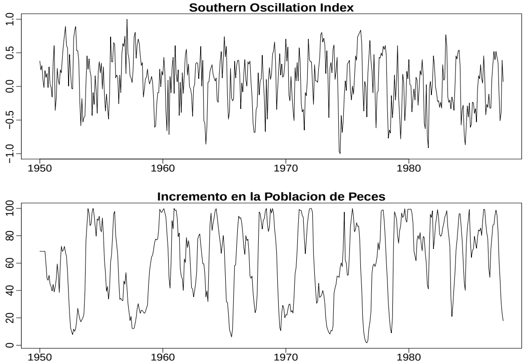
ACF para promedio Movil con 3, 7 y 15 datos.

Correlaciones



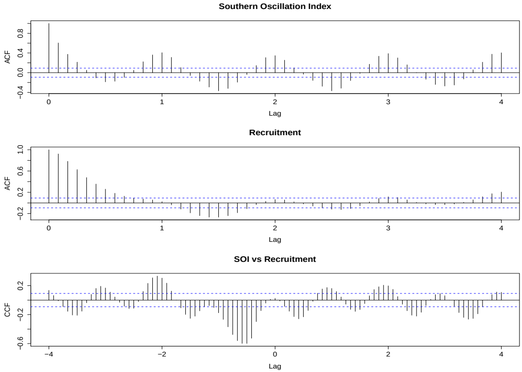
ACF para datos de lenguaje.

Correlaciones



Series SOI e Incremento de Peces.

Correlaciones



ACF para SOI e Incremento de Peces.

Esquema

Modelación de S T

Enfoque General

- Graficar la serie y examinar sus características principales, en particular examinar si existe
  a) una tendencia,
  b) componentes estacionales,
  c) cambios repentinos en el comportamiento,
  d) observations atípicas (outliers).
- Eliminar la tendencia y las componentes estacionales para obtener residuales estacionarios. Para esto, es posible que sea necesario aplicar una transformación inicial a los datos.
- Escoger un modelo para los residuales estacionarios, usando diversas estadísticas muestrales, como la autocorrelación muestral.
- Verificar que los residuales que se obtienen una vez ajustado el modelo, son ruido blanco.

Modelación de ST

Enfoque General

- Graficamos los datos para verificar si hay discontinuidades aparentes en la serie, como un cambio de nivel o un cambio de variabilidad.
- Posibilidad de analizar la serie en segmentos homogéneos.
- Las observaciones atípicas deben estudiarse cuidadosamente para ver si es razonable eliminarlas.

Modelación de ST

Enfoque General

El gráfico nos puede indicar si es razonable una descomposición del tipo

$$X_t = m_t + s_t + Y_t$$

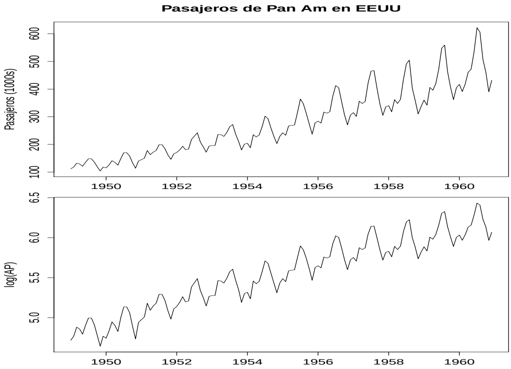
donde

- m_t es una función que varía lentamente que representa la *tendencia* de la serie,
- s_t es una función periódica con período d que representa la *componente estacional* y
- Y_t es un proceso estacionario.

Modelación de ST

Enfoque General

Si las fluctuaciones estacionales y las producidas por el ruido aumentan con el nivel del proceso, puede ser necesario aplicar una transformación previa a los datos.



Transformación logarítmica de os datos.

Modelación de ST

Tendencia

Métodos para construcción de modelos:

- Ajuste de tendencia polinomial,
- Diferenciación.

Métodos No Paramétricos:

- Promedios móviles
- Núcleo
- Regresión local
- Lowess
- Splines
- Suavizamiento Espectral

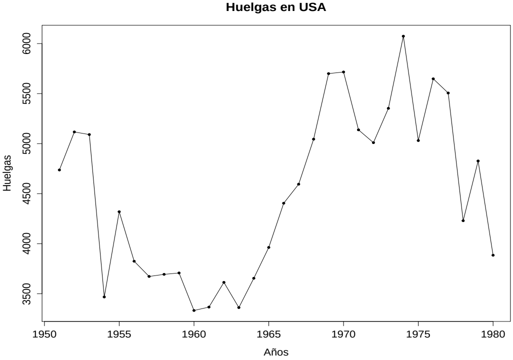
No resultan adecuados para construcción de modelos

Esquema

Modelación de ST

Regresión

La gráfica muestra el número de huelgas en USA en el período 1951 - 1980.



Modelación de ST

Regresión

Ajustamos una tendencia cúbica:

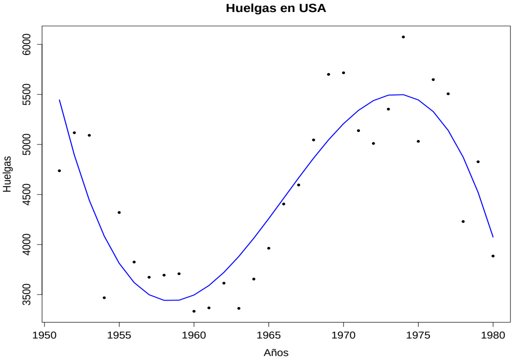
$$m_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

a los datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ usando mínimos cuadrados.: Buscamos los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ que minimizan la suma

$$\sum_{t=1}^{n} (x_t - m_t)^2$$

Modelación de ST

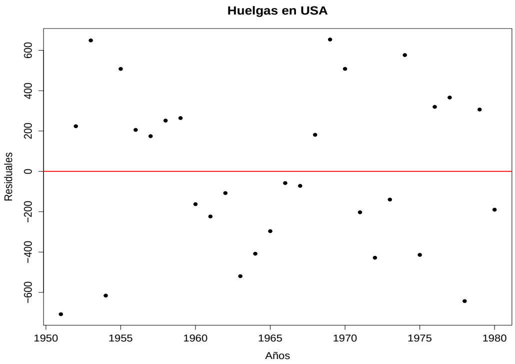
Regresión



Ajuste de un polinomio cubíco a los datos.

Modelación de ST

Regresión



Residuales del ajuste de un polinomio cuadrático a los datos.

Modelación de ST

Regresión

Tenemos una serie $X_t, \; t = 1, \ldots, n$ que es la serie de interés y queremos analizar la influencia de las series $Z_{t1}, Z_{t2}, \ldots, Z_{tq}$, con $t = 1, \ldots, n$ a través de una relación lineal:

$$X_t = \beta_1 Z_{t1} + \beta_2 Z_{t2} + \cdots + \beta_q Z_{tq} + w_t$$

Podemos escribir este modelo lineal de manera general como

$$\mathbf{X}_t = \beta' \mathbf{Z}_t + w_t$$

Modelación de ST
Regresión

Estimamos β por mínimos cuadrados:

$$Q = \sum_{t=1}^{n} w_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \beta' \mathbf{Z}_t)^2$$

La solución de este problema es

$$\hat{\beta} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}$$

Estos estimadores son insesgados y tienen varianza mínima entre los estimadores lineales insesgados.

Modelación de ST

Regresión

La suma de errores al cuadrado mínimizada se denota por *SSE* y es

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \hat{\beta}'\mathbf{Z}_t)^2 = \mathbf{X}'\mathbf{X} - \hat{\beta}\mathbf{Z}'\mathbf{X}$$

Si los errores tienen distribución normal, $\hat{\beta}$ también es el estimador de máxima verosimilitud de β y tiene distribución normal con

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma_w^2(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \equiv \sigma_w^2 C.$$

Modelación de ST

Regresión

Un estimador insesgado para la varianza es

$$s_w^2 = MSE = \frac{SSE}{n-q}$$

donde $MSE =$ Mean Squared Error.

Bajo la hipótesis de normalidad, s_w^2 tiene distribución χ^2_{n-q} y es independiente de $\hat{\beta}$.

$$t_{n-q} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s_w\sqrt{c_{ii}}}$$

tiene distribución t con $n-q$ grados de libertad.

Modelación de ST

Regresión

En este esquema podemos usar el análisis de la varianza para comparar modelos anidados, usando la distribución F.

Este procedimiento puede usarse para seleccionar variables paso a paso.

Una alternativa que busca comparar modelos sin proceder secuencialmente, evaluando cada modelo por separado, es la siguiente: Supongamos que consideramos un modelo de regresión normal con k coeficientes y llamamos el estimador de MV de la varianza

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{SSE_k}{n}$$

Modelación de ST

Regresión

Criterio de Akaike

Akaike sugirió medir la calidad del ajuste para este modelo por una expresión que busca balancear el error del ajuste contra el número de parámetros en el modelo, a través del siguiente coeficiente

$$\mathrm{AIC} = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{n + 2k}{n}$$

donde $\hat{\sigma}_k^2$ es el estimador de MV de la varianza y k es el número de parámetros en el modelo.

Modelación de ST

Regresión

Dos modificaciones de este criterio son las siguientes:

Criterio de Akaike Corregido

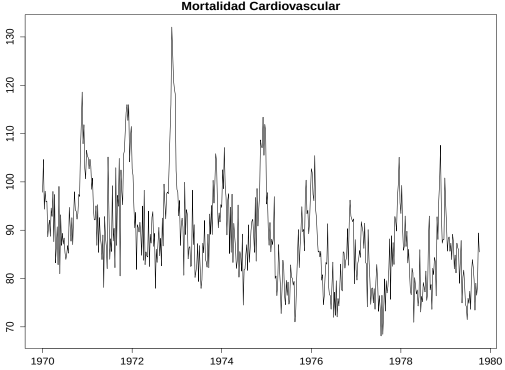
$$\text{AICc} = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{n+k}{n-k-2}$$

Criterio de Información Bayesiano

$$\text{BIC} = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{k \log n}{n}$$

Modelación de ST

Regresión



Mortalidad semanal por causas cardiovasculares en Los Angeles County.

Modelación de ST

Regresión

Ajuste de tendencia polinomial
Consideramos un modelo de la forma

$$X_t = m_t + Y_t$$

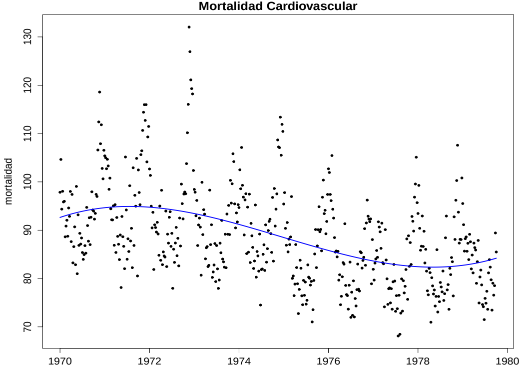
donde m_t es la tendencia. Una posible forma de m_t es regresión polinomial:

$$m_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_p t^p$$

que podemos ajustar por mínimos cuadrados.

Modelación de ST

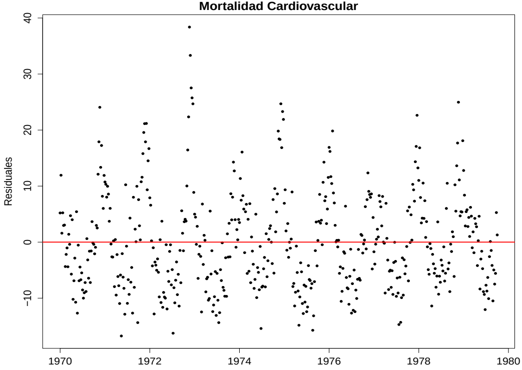
Regresión



Ajuste de polinomio de grado 3 mostrando tendencia.

Modelación de ST

Regresión



Residuales del ajuste de polinomio de grado 3 mostrando tendencia.

Modelación de ST

Regresión

Ajuste de componente estacional

Si tenemos un modelo de la forma

$$X_t = s_t + Y_t$$

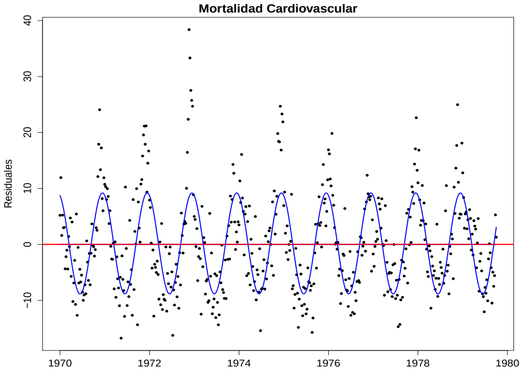
con componente estacional, podemos superponer a la estimación anterior una componente estacional armónica

$$\begin{aligned} s_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(2\pi\omega_1 t) + \beta_1 \operatorname{sen}(2\pi\omega_1 t) + \cdots \\ + \alpha_p \cos(2\pi\omega_p t) + \beta_p \operatorname{sen}(2\pi\omega_p t) \end{aligned}$$

que podemos ajustar por mínimos cuadrados.

Modelación de ST

Regresión



Ajuste de componente armónica mostrando estacionalidad.

Modelación de ST

Regresión

Ajuste de tendencia y componente estacional

Si tenemos un modelo de la forma

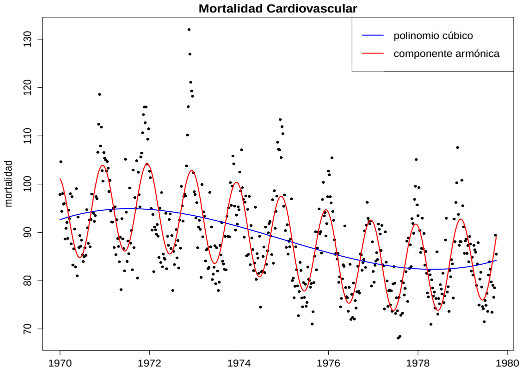
$$X_t = m_t + s_t + Y_t$$

con tendencia y componente estacional, podemos superponer las estimaciones anteriores:

$$\begin{aligned} m_t + s_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_p t^p \\ + \alpha_1 \cos(2\pi\omega_1 t) + \beta_1 \operatorname{sen}(2\pi\omega_1 t) + \cdots \\ + \alpha_p \cos(2\pi\omega_p t) + \beta_p \operatorname{sen}(2\pi\omega_p t) \end{aligned}$$

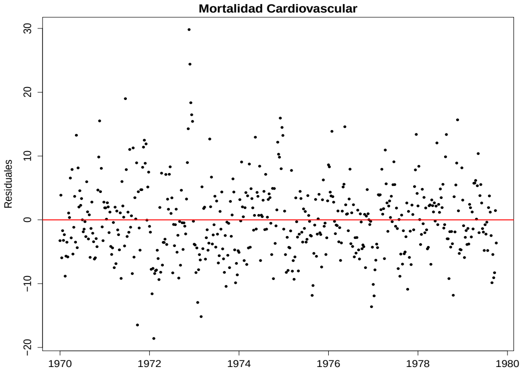
que podemos ajustar por mínimos cuadrados.

Modelación de ST
Regresión



Ajuste de polinomio de grado 3 mostrando tendencia y componente armónica mostrando estacionalidad.

Modelación de ST
Regresión



Residuales del ajuste de polinomio de grado 3
y componente estacional.

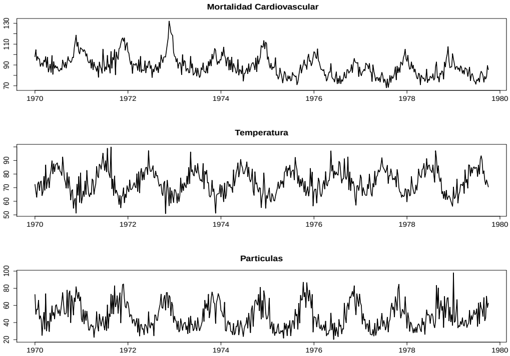
Modelación de ST

Regresión

Consideramos ahora un modelo con regresión sobre otras series de datos que corresponden a la temperatura y la comtaminación para el mismo periodo.

En las siguientes láminas mostramos en primer lugar las tres series y luego una matriz de gráficos que muestra las posibles relaciones entre las distintas variables.

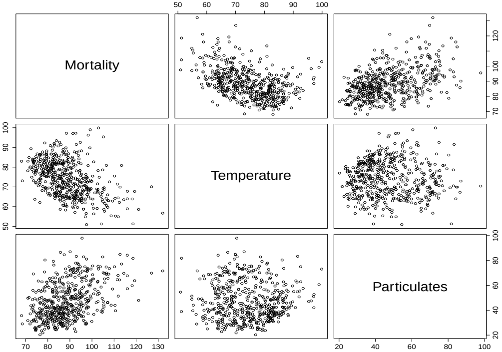
Modelación de ST
Regresión



Series para mortalidad cardiovascular, temperatura y contaminación en Los Angeles County.

Modelación de ST

Regresión



Matriz de gráficos para mortalidad cardiovascular, temperatura y contaminación en Los Angeles County.

Modelación de ST

Regresión

Intentamos los siguientes modelos:

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 t + w_t \tag{1}$$

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 (T_t - \bar{T}) + w_t \tag{2}$$

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 (T_t - \bar{T}) + \beta_4 (T_t - \bar{T})^2 + w_t \tag{3}$$

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 (T_t - \bar{T}) + \beta_4 (T_t - \bar{T})^2 + \beta_5 P_t + w_t \tag{4}$$

Modelación de ST

Regresión

Modelo	k	SSE	df	MSE	R^2	AIC	BIC
(1)	2	40,020	506	79.0	.21	5.38	5.4
(2)	3	31,413	505	62.2	.38	5.14	5.17
(3)	4	27,985	504	55.5	.45	5.03	5.07
(4)	5	20,508	503	40.8	.60	4.72	4.77

El modelo seleccionado sería

$$\widehat{M}_t = 81.59 - 0.027t - 0.473(T_t - 74.6) + .023(T_t - 74.6)^2 + 0.255P_t$$

Los errores estándar de los coeficientes son, respectivamente, 0.002, 0.032, 0.003 y 0.019.

Esquema

Modelación de ST

Diferenciación

- Buscamos eliminar la tendencia tomando diferencias de términos sucesivos.
- Para ello definimos el operador de diferencias ∇ por

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$$

donde B es el operador de retardo (backward shift)

$$BX_t = BX_{t-1}$$

Modelación de ST

Diferenciación

- Las potencias de estos operadores se definen de la manera usual

$$B^j X_t = X_{t-j}, \qquad \nabla^j X_t = \nabla(\nabla^{j-1}(X_t)), \quad j \geq 1$$

con $\nabla^0(X_t) = X_t$.

- Los polinomios en B y ∇ se operan al igual que los polinomios de variables reales. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla(X_t)) = (1-B)(1-B)X_t \\ &= (1-2B+B^2)X_t \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}\end{aligned}$$

Modelación de ST

Diferenciación

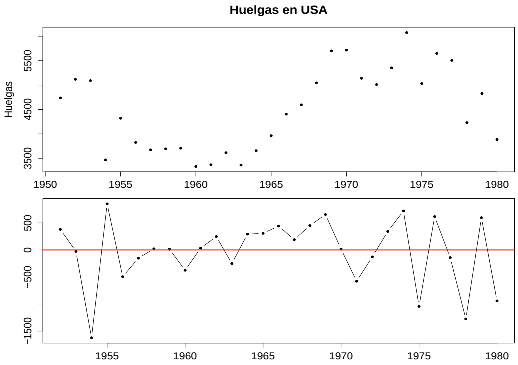
- Si aplicamos el operador ∇ a una función de tendencia lineal $m_t = c_0 + c_1 t$, obtenemos una función constante

$$\nabla m_t = m_t - m_{t-1} = c_0 + c_1 t - (c_0 + c_1(t-1)) = c_1$$

- De manera similar cualquier tendencia polinomial de grado k puede ser reducida a una constante aplicando el operador ∇^k.

Modelación de ST

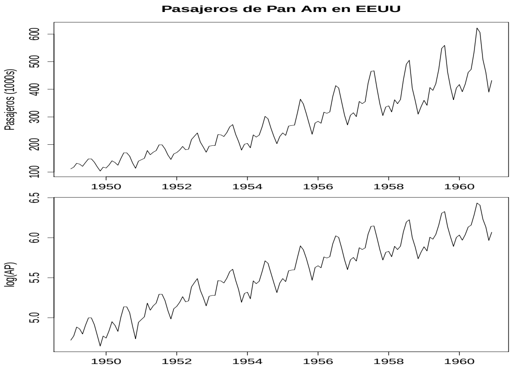
Diferenciación



Diferenciación de la series de huelgas en USA.

Modelación de ST

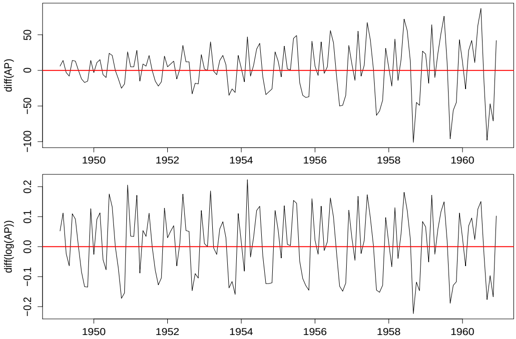
Diferenciación



Número de pasajeros de Pan Am (arriba) logaritmo de número de pasajeros (abajo).

Modelación de ST

Diferenciación



Diferenciación de las series de pasajeros de Pan Am.

Esquema

Modelación de ST

Suavizamiento

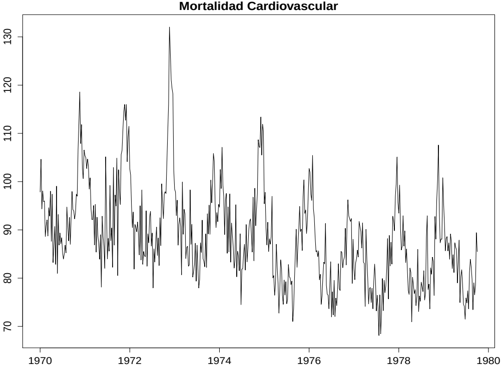
Suavizamiento por Promedios Móviles
Este método es útil para hallar tendencias a largo plazo y también componentes estacionales.
Si x_t representa las observaciones entonces

$$\hat{m}_t = \sum_{j=-k}^{k} a_j x_{t-j}$$

donde $a_j = a_{-j} \geq 0$ y $\sum_{j=-k}^{k} a_j = 1$ es un promedio móvil simétrico de los datos.
Con frecuencia usamos $a_j = 1/(2k+1)$, que da igual peso a todos los puntos.

Modelación de ST

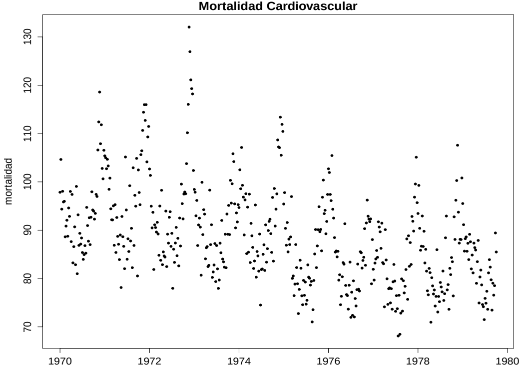
Suavizamiento



Mortalidad semanal por causas cardiovasculares en Los Angeles County.

Modelación de ST

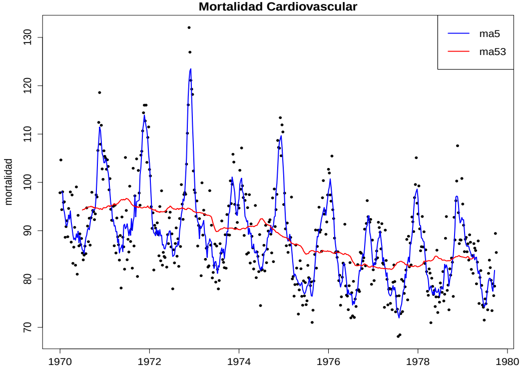
Suavizamiento



Mortalidad semanal por causas cardiovasculares en Los Angeles County.

Modelación de ST

Suavizamiento



Ajuste de promedios móviles con 5 (azul) y 53 (rojo) datos, mostrando tendencia y estacionalidad en la serie.

Modelación de ST

Suavizamiento

Podemos pensar que el promedio móvil es un proceso que se obtiene a partir de X_t al aplicar un filtro lineal

$$\hat{m}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}$$

con pesos $a_j = (2q+1)^{-1}, -q \leq j \leq q$.

En este caso particular se trata de un filtro 'pasa bajo' (*low pass*) ya que deja pasar las bajas frecuencias y filtra las altas frecuencias. Lo que queda es una estimación de la tendencia de X_t que varía lentamente.

Modelación de ST

Suavizamiento

Escogiendo los pesos de manera adecuada podemos diseñar filtros que no sólo serán efectivos en la atenuación del ruido, sino que dejan pasar una clase grande de funciones, por ejemplo, los polinomios de grado menor o igual a 3, sin distorsión.

El filtro de 15 puntos de Spencer deja pasar los polinomios de grado menor o igual que 3 sin distorsión y se define por

$$(a_0, a_1, \ldots, a_7) + \frac{1}{320}(74, 67, 46, 21, 3, -5, -6, -3)$$

con $a_j = 0$ para $|j| > 7$ y $a_{-j} = a_j$.

Suavizamiento local

- Los métodos que usamos anteriormente para estimar la tendencia y la componente estacional son globales: Suponen que la misma función sirve para todo el rango de valores.
- La técnica de promedios móviles, en cambio, es una técnica local.
- A continuación definimos otros suavizadores locales.

Modelación de ST

Suavizamiento por núcleo

- El suavizamiento por núcleos es un promedio móvil que usa una función de peso.

$$\hat{m}_t = \sum_{i=1}^{n} w_i(t) x_i,$$

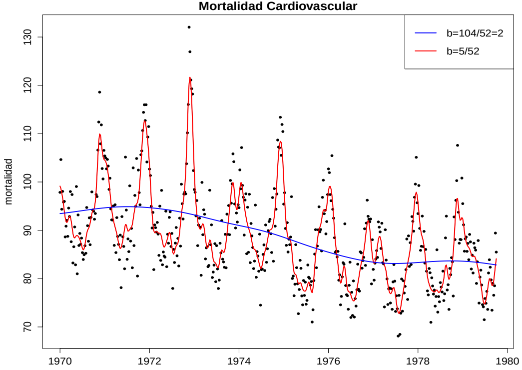
  con pesos

$$w_i(t) = \frac{1}{C} K\left(\frac{t-i}{b}\right), \qquad C = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{t-i}{b}\right)$$

  donde K es la función de núcleo.
- Se conoce como el estimador de Nadaraya-Watson.
- Con frecuencia se usa como núcleo la densidad normal típica.

Modelación de ST

Suavizamiento



Suavizamiento por núcleos con dos anchos de banda.

Modelación de ST

Suavizamiento

Suavizamiento por regresión local

- El suavizamiento por regresión local usa los datos más cercanos en el tiempo

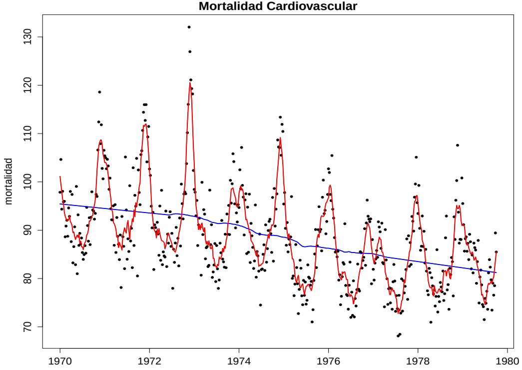
$$x_{t-k/2}, \ldots, x_t, \ldots, x_{t+k/2}$$

para predecir x_t usando una regresión local.

- Para los datos de mortalidad por causas cardiovasculares, la regresión se hizo con $k = n/2$ para estimar la tendencia y $k = n/100$ para estimar la componente estacional.

Modelación de ST

Suavizamiento



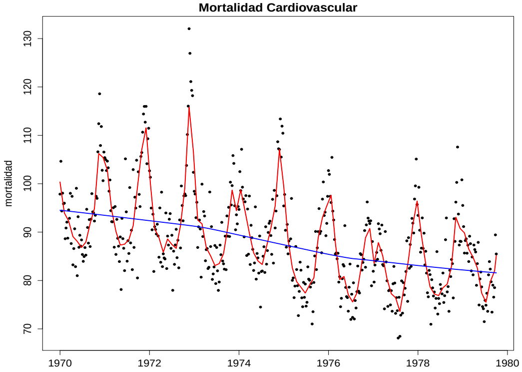
Suavizamiento por regresión local.

Suavizamiento por LOWESS

- LOWESS es un método de suavizamiento que usa regresión local para construir una curva suave que muestre la tendencia de una nube de puntos.
- También se conoce como regresión polinomial local pesada y fue propuesto por Cleveland en 1979.
- En cada punto se ajusta un polinomio de grado bajo usando un subconjunto de datos cercanos al punto en el cual se quiere estimar la respuesta.
- El polinomio se ajusta usando mínimos cuadrados pesados, dando mayor peso a los puntos más cercanos

Modelación de ST

Suavizamiento



Suavizamiento por LOWESS.

Modelación de ST

Suavizamiento

Suavizamiento por Splines

- Este método es una extensión de la regresión polinomial.
- En este caso se divide el intervalo de tiempo en k subintervalos

$$[t_0 = 1, t_1], [t_1 + 1, t_2], \ldots, [t_{k-1} + 1, t_k = n]$$

  Los valores $t_1, t_2, \ldots, t_k$ se conocen como *nudos*.
- En cada intervalo se ajusta por regresión un polinomio local de modo que en los nudos coincidan los valores del polinomio y de sus primeras derivadas.

Modelación de ST

Suavizamiento

Suavizamiento por Splines

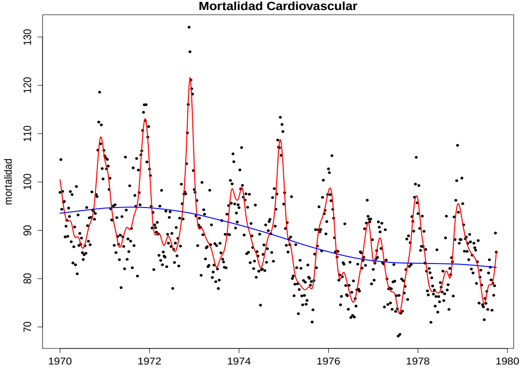
- Una variación del método de suavizamiento por splines busca minimizar una combinación de ajuste y el grado de ’suavidad’ de la curva, usando la ecuación

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t - s_t)^2 + \lambda \int \left(s_t''\right)^2 dt$$

donde s_t es, por ejemplo, un spline cúbico con un nudo en cada t.

Modelación de ST

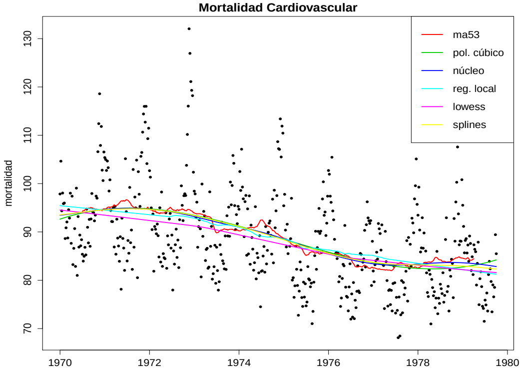
Suavizamiento



Suavizamiento por Splines.

Modelación de ST

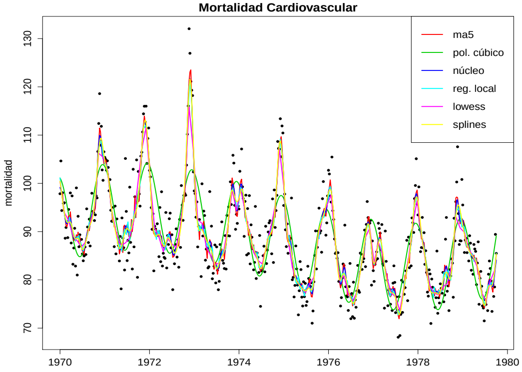
Suavizamiento



Métodos de Suavizamiento.

Modelación de ST

Suavizamiento



Métodos de Suavizamiento.

Modelación de ST

Suavizamiento

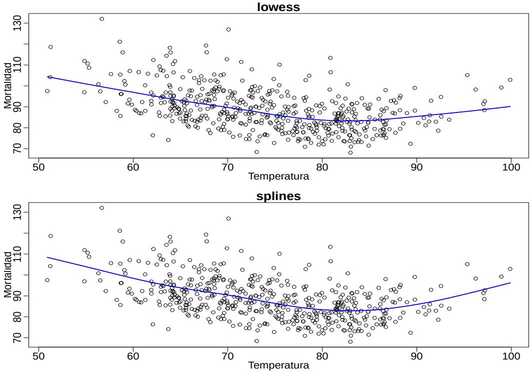
Las técnicas de suavizamiento también pueden aplicarse al suavizamiento de una serie de tiempo como función de otra.

Vimos anteriormente que hay una relación no-lineal entre la serie de mortalidad y la de temperatura.

La gráfica en la siguiente lámina muestra gráficas de dispersión de Mortalidad como función de la temperatura y suavizamientos obtenidos con LOWESS y Splines.

Modelación de ST

Suavizamiento

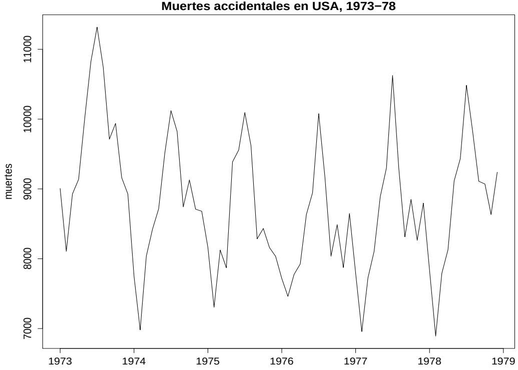


Suavizamiento.

Esquema

Modelación de ST

Descomposición



Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

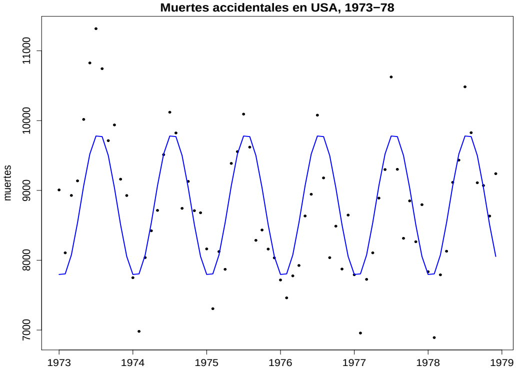
Descomposición

Primer Enfoque.
Estimación de la tendencia y estacionalidad

- Probamos ajustar un modelo con componente estacional.
- Ajustamos primero un modelo con un armónico con frecuencia $2\pi/12$.
- Luego añadimos un segundo armónico con frecuencia $2\pi/6$.

Modelación de ST

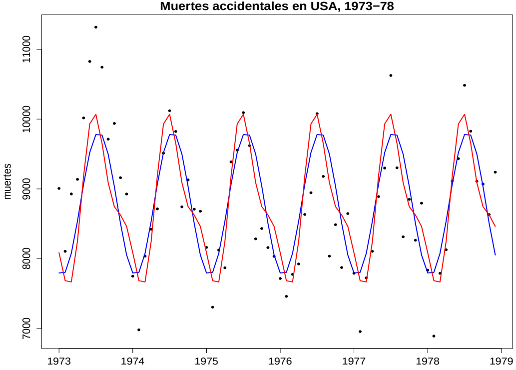
Descomposición



Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

Descomposición

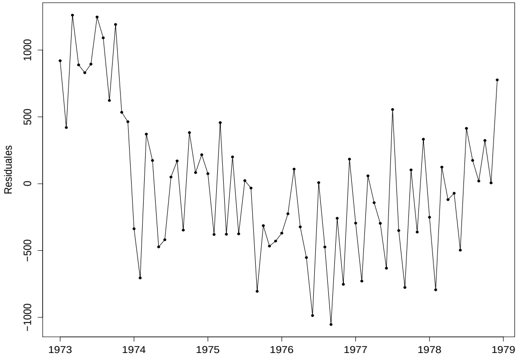


Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

Descomposición

Los residuales muestran que hay una tendencia cuadrática que debe ser estimada y filtrada

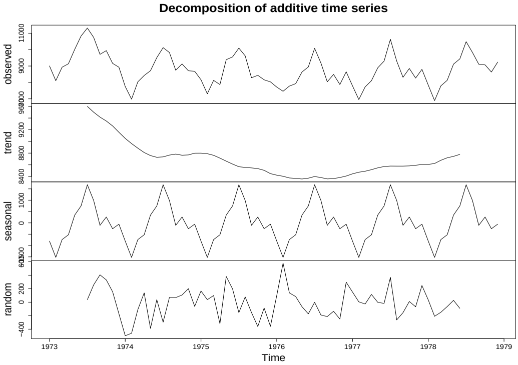


Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

Descomposición

Para ajustar un modelo completo, que incluya tendencia y componente estacional, usamos en `R` la función `decompose`, que usa promedios móviles para el ajuste



Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

Descomposición

Segundo Enfoque.
Diferenciación para eliminar tendencia y estacionalidad

- Suponemos inicialmente que el modelo sólo tiene una componente estacional:

$$X_t = s_t + Y_t$$

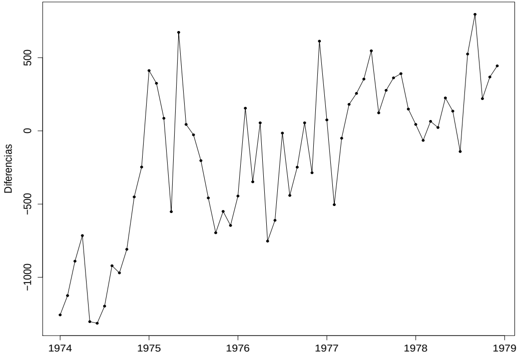
- Aplicamos inicialmente el operador de diferenciación a los datos con un retardo de 12 meses.
- Si la componente estacional s_t tiene período de 12 meses, al hacer esto obtenemos

$$\nabla^{(12)} X_t = Y_t - Y_{t-12}$$

Modelación de ST

Descomposición

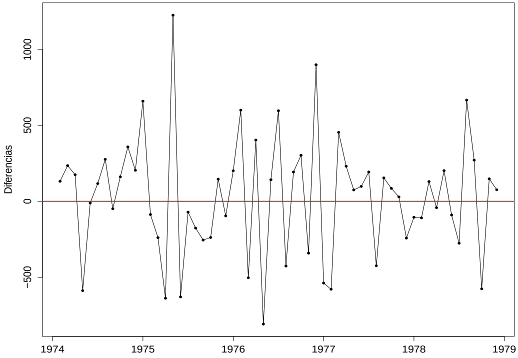
Las diferencias todavía muestran una tendencia ascendente, así que tomamos una diferencia adicional con retardo 1.



Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

Descomposición

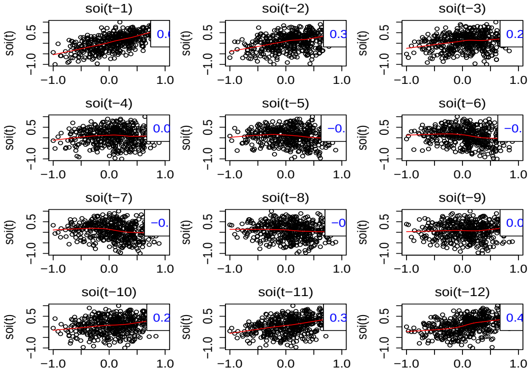


Muertes por causas accidentales en USA 1974-79.

Modelación de ST

Diagnóstico

Gráficas de dispersión con retardo para el SOI.

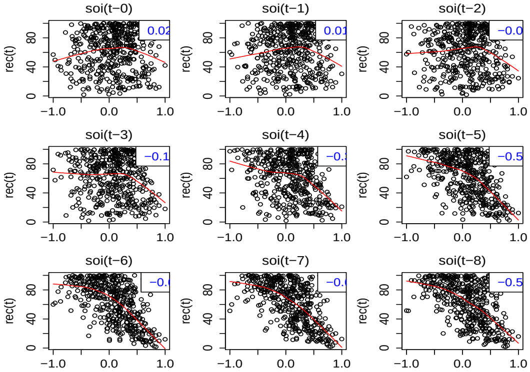


SOI.

Modelación de ST

Diagnóstico

Gráficas de dispersión con retardo para el SOI y peces.



SOI.