Cointegración

Yareli Morán
Georges Bucyibaruta
Diego Rivera

Centro de Investigación en Matemáticas

9 de diciembre de 2013

Motivación

- C.W.J.Granger en 1981 y extendida por Engle y Granger (1987).
- Proporciona las herramientas básicas para manejar el problema de la dinámica a corto y largo plazo en variables no estacionarias.
- Usemos las caminatas de un borracho y un perro como un ejemplo de motivación.
- Sean x_t y y_t las caminatas del perro y el borracho respectivamente

$$x_t - x_{t-1} = u_t \tag{1}$$

$$y_t - y_{t-1} = w_t \tag{2}$$

- El valor observado más reciente de la variable es el mejor predictor de valores futuros.
- ¿Que pasaría si el perro pertenece al borracho?
- Al salir del bar el borracho exclama -"¿Oliver donde estas?" Oliver se detiene y responde al llamado ladrando. El perro piensa,- "Oh, no puedo dejarlo ir demasiado lejos; el me va dejar fuera". El borracho piensa, -"Oh, no puedo dejar que se aleje demasiado , me va a despertar en la noche con sus ladridos".
- Apesar de encontrarse alejados ellos intentan reducir la distancia que hay entre ellos
- Mecanismo de coreccion de errores.

Motivación
...Continuación

- Si esto es correcto, entonces la distancia entre los dos caminos es estacionaria y los pasos(caminatas) del borracho y su perro se dice que están cointegradas de orden cero.
- ¿Que pasaría si el perro no pertenece al borracho?
- Como pasa el tiempo, la posibilidad de que cualquiera de los dos se han alejado mucho de la bar crece
- Los caminos de la borracho y el perro son todavía no estacionarias.
- Regresión espuria.

Series no estacionarias

- Considere la serie de tiempo y_t

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + u_t \tag{3}$$

- Caminata aleatoria pura

$$y_t = y_{t-1} + u_t \tag{4}$$

- Caminata aleatoria con deriva.

$$y_t = \beta_1 + y_{t-1} + u_t \tag{5}$$

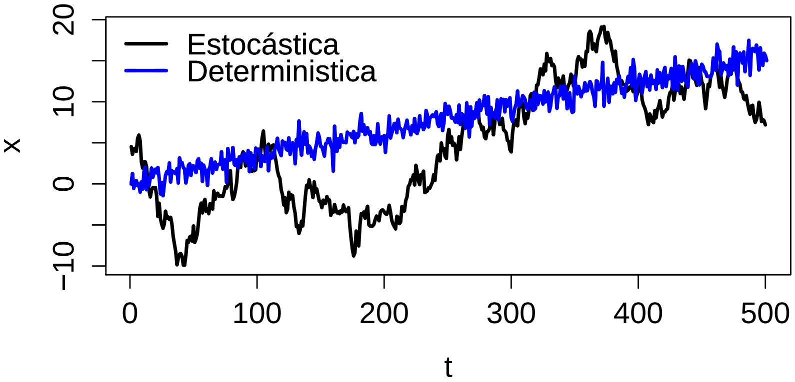
- Caminata aleatoria con tendencia deterministica(Tendencia estacionaria)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t \tag{6}$$

- Caminata aleatoriacon deriva y tendencia deterministica

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + y_{t-1} + u_t \tag{7}$$

Series no estacionarias



Procesos integrados

Procesos Integrados

Sea y_t una serie de tiempo, decimos que es integrada de orden d $I(d)$ si $\Delta^d y_t$ es estacionaria, esto es $I(0)$ y se denota por $y_t \sim I(d)$

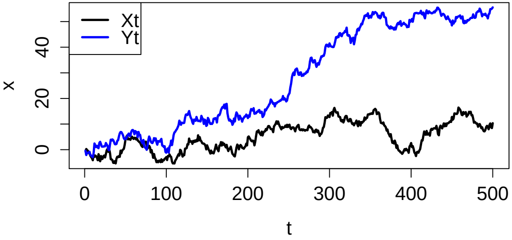
Regresión espuria

- Sea x_t y y_t series de tiempo $I(1)$.

$$
\begin{aligned}
y_t &= y_{t-1} + u_t \qquad (8)\\
x_t &= x_{t-1} + w_t \qquad (9)
\end{aligned}
$$

- Se desea establecer una relación entre x_t y y_t.
- Una regresión entre las variables I(1), puede concluir que existe una fuerte relación estadística entre ellas, aún cuando en verdad éste no sea el caso.

Resgresion espuria



	Estimate	Std. Error	t value	$Pr(>\|t\|)$
β_0	-0.3971	0.3132	-1.27	0.2053
x_t	0.1981	0.0091	21.75	0.0000
R^2	D-W			
0.4862	0.05898709			

Cointegración

Considere las series de tiempo x_t y y_t ambas $I(1)$. Decimos que x_t y y_t estan cointegradas si existe β tal que $y_t - \beta x_t$ es $I(0)$, lo cual es denotado por $CI(1,1)$. Lo cual significa que la regresión

$$y_t = \beta x_t + u_t \tag{10}$$

tiene sentido ya que y_t y x_t mantienen un comportamiento similar a lo largo del tiempo.
Si y_t y x_t son no cointegrados, entonces $y_t - \beta x_t = u_t$ es tambien $I(1)$, esto es, las series tendran tendencias separadasa lo largo del tiempo.

Cointegración

En general (Engle-Granger 1987) definen la cointegración de la siguiente forma:

Cointegración

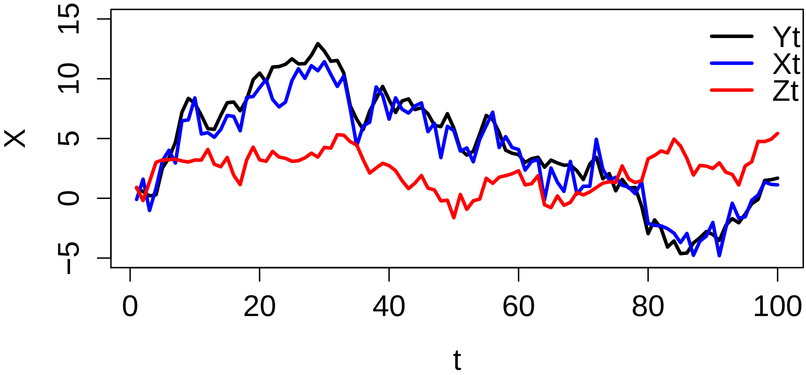
Los componentes del vector $\mathbf{x}_t$ dicen ser cointegrados de orden d,b denotado por $\mathbf{x}_t \sim CI(d,b)$, si:

- Todos los componentes de $\mathbf{x}_t$ son $I(d)$;
- Existe un vector $\boldsymbol{\alpha}$ tal que:

$$z_t = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x}_t \sim I(d-b) \quad b > 0. \tag{11}$$

- el vector $\boldsymbol{\alpha}$ es llamdo vector de cointegración.

Cointegración



Modelo de errores de corrección

Si dos series x_t y y_t estan cointegradas entonces la relación entre ellas se puede expresar como un modelos de error de corrección.

Si las variables están cointegradas se pueden utilizar los residuos para corregir los errores y estimar también los efectos a corto plazo. El modelo a estimar se denomina de corrección de errores y esta dado por:

$$\Delta y_t = \alpha \Delta x_t + \gamma u_{t-1} + \epsilon_t \tag{12}$$

donde $y_{t-1} - \beta x_{t-1} = u_{t-1}$ es el mecanismo de corrección y β es el efecto a largo plazo de x sobre y, γ es el efecto a corto plazo de x sobre y.

Modelo de errores de corrección

El ECM establece que los cambios en y_t pueden ser explicados por cambios en su propia historia, cambios en los retardos de x_t y el error del equilibrio a largo plazo en el periodo previo. El valor de γ determina la velocidad del ajuste. Mientras más cerca este de uno, más rápido será el ajuste hacia el equilibrio. siempre debe ser de signo negativo de otra forma el sistema puede diverger de su equilibrio a largo plazo.

Método de Engle-Granger

- Realizar una regresión de las variables en el conjunto $I(1)$,

$$y_t = \beta_1 x_{t,1} + ... + \beta_k x_{t,k} + u_t, \quad t = 1, ..., T \tag{13}$$

donde u_t es el termino de error. En el cual se verifica si u_t es $I(0)$, mediante la prueba de Dickey-Fuller aumentada (ADF.)

- Se ajusta un modelo de error de corrección para el caso bivariado.

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{K} \alpha_{1,i} \Delta x_{t-i} + \sum_{i=1}^{L} \alpha_{2,i} \Delta y_{t-i} + \epsilon_{1,t} \tag{14}$$

$$\Delta x_t = \phi_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{K} \phi_{1,i} \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^{L} \phi_{2,i} \Delta x_{t-i} + \epsilon_{2,t} \tag{15}$$

Ejemplo

Considere los siguientes generados mediante el siguiente mecanismo $y_t = .6x_{t-1} + u_t$ donde $u_t \sim N(0,1)$ y $x_t = x_{t-1} + w_t$ donde $w_t \sim N(0,1)$

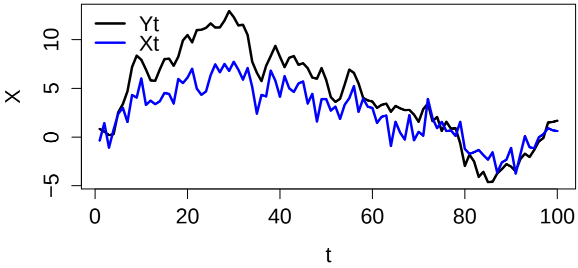


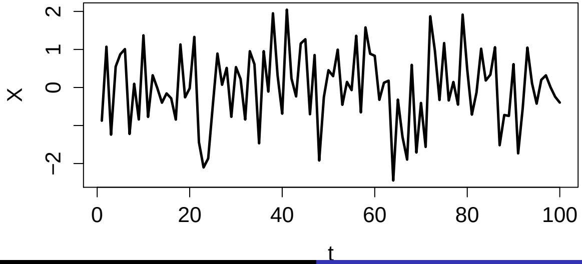
Figura : Series Cointegradas

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
β_0	0.0379	0.1348	0.28	0.7794
x_t	0.5811	0.0214	27.19	0.0000
R^2	D-W			
0.8817	2.149343			

Cuadro : Estimadores

Valores criticos	1 %	5 %	10 %
τ	-2.6	-1.95	-1.61
Estadístico			
-6.6278			

Cuadro : Estimadores



	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	0.0034	0.1036	0.03	0.9739
u_{t-1}	-0.9688	0.1586	-6.11	0.0000
Δx_t	0.8086	0.1120	7.22	0.0000
Δy_t	-1.0589	0.1084	-9.77	0.0000

Ejemplo II

Considere los datos trimestrales Gasto de Consumo Personal (PCE) y del ingreso personal disponible (PDI) para los Estados Unidos en miles de millones de dólares de 1987 para el período 1970:I – 1991:IV.

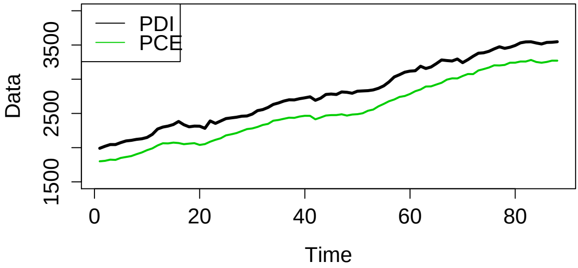


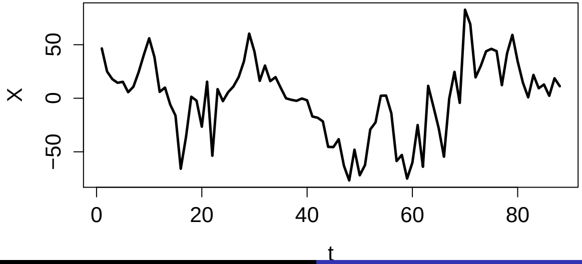
Figura : Series Cointegradas

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-171.4412	22.9172	-7.48	0.0000
PDI	0.9672	0.0081	119.87	0.0000
R^2	D-W			
0.994	0.5316286			

Cuadro : Estimadores

Valores criticos	1 %	5 %	10 %
τ	-2.6	-1.95	-1.61
Estadístico			
-2.8235			

Cuadro : Estimadores



	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	13.2881	2.7864	4.77	0.0000
error.lagged	-0.0046	0.0598	-0.08	0.9389
dy1.1	0.0816	0.0831	0.98	0.3289
dy2.1	0.1321	0.1188	1.11	0.2694

Sistema de variables cointegradas

Se dice que una serie de tiempo vectorial $\mathbf{y}_t$ $_{\texttt{nx1}}$ es cointegrada si existe al menos un vector $\texttt{nx1}$ diferente de cero β tal que $\beta'\mathbf{y}_t$ es estacionaria, o $I(0)$. Donde β es llamado el *vector de cointegración*.

Esto es, aunque muchos acontecimientos pueden causar cambios permanentes en los elementos individuales de $\mathbf{y}_t$, hay una relación de equilibrio a largo plazo que ata el componente individual a los restantes, representada por la combinación lineal $\beta'\mathbf{y}_t$.

VAR(p)

Consideremos el modelo de vector autorregresivo (no estacionario) de orden p (VAR(p)) dado por

$$\mathbf{y}_t = \alpha + \phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \phi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{16}$$

i.e.
$$\phi(L)\mathbf{y}_t = \alpha + \varepsilon_t$$

con
$$\phi(L) = \mathbf{I}_n - \phi_1 L - \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p$$

donde ϕ_s matriz (nxn) para $s = 1, 2, \ldots, p$, el término de error ε_t i.i.d $\varepsilon_t \sim N(0, \Omega)$ y α vector de constantes.

Representación alternativa de un VAR(p)

Se puede ver que un VAR(p) de la forma (16) siempre puede representarse como

$$\mathbf{y}_t = \zeta_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \zeta_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \alpha + \rho \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{17}$$

donde $\rho = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p$,
$\zeta_s = -(\phi_{s+1} + \phi_{s+2} + \cdots + \phi_p)$, para $s = 1, 2, \ldots, p-1$.

Restando $\mathbf{y}_{t-1}$ de ambos lados en (17):

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_t &= \zeta_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \zeta_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \alpha + (\rho - \mathbf{I}_n) \mathbf{y}_{t-1} \\ &= \zeta_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \zeta_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \alpha + \zeta_0 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t.\end{aligned} \tag{18}$$

con $\zeta_0 = \rho - \mathbf{I}_n = -(\mathbf{I}_n - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p) = -\phi(1)$

Teorema de representación Granger

Considere un vector $\mathbf{y}_t$, donde $\Delta\mathbf{y}_t$ es $I(0)$. Supón que hay exactamente r relaciones de cointegración entre los elementos de $\mathbf{y}_t$. Entonces existe una matriz $\mathbf{A}'$ cuyas filas son linealmente independientes tal que el vector $\mathbf{z}_t$ rx1 definido por

$$\mathbf{z}_t \equiv \mathbf{A}'\mathbf{y}_t$$

es estacionario.

Si, además, el proceso $\mathbf{y}_t$ puede representarse como un VAR(p), definido en (16), entonces existe una matriz $\mathbf{B}$ tal que

$$\phi(1) = \mathbf{B}\mathbf{A}', \tag{19}$$

más aún, existen matrices nxn $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ tal que

$$\Delta\mathbf{y}_t = \zeta_1\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \zeta_2\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \zeta_{p-1}\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \alpha - \mathbf{B}\mathbf{z}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{20}$$

que es la representación del *modelo vectorial del error de corrección.*

Del Teorema de representación de Granger $\mathbf{z}_t = \mathbf{A}'\mathbf{y}_t$ es estacionario por lo que también lo es $\mathbf{B}\mathbf{A}'\mathbf{y}_t$, equivalentemente $\mathbf{B}\mathbf{z}_t$ es estacionario.
La matriz $\mathbf{A}'$ es tal que tiene todas las r relaciones de cointegración de los elementos de $\mathbf{y}_t$, esto es, cada columna de $\mathbf{A}$ representa una relación a largo plazo entre las series individuales del sistema $\mathbf{y}_t$.
La matriz $\mathbf{B}$ determina la velocidad de ajuste al equilibrio a largo plazo y se conoce como matriz de *cargas de ajuste*.

Ahora, el interés es como estimar estos vectores de cointegración.

Método de Johansen

El análisis de cointegración de series consiste en:

1. Estimar el rango de cointegración.
2. Estimar los vectores de cointegración.

El método de Johansen parte de las siguientes hipótesis:

- El vector $\mathbf{y}_t$, de n series $I(1)$, sigue un VAR(p), y admite por tanto una formulación en forma de corrección del error *VECM* dado por (20).
- Los errores ε_t son ruido blanco gaussinano $\mathrm{N}(0, \Omega)$.
- El número de relaciones de cointegración es $r = n - h$ (hay h tendencias en común) y que ζ_0 se puede escribir como $\zeta_0 = -\mathbf{BA}'$ donde $\mathbf{A}'$ es de dimensión rxn.

Método de Johansen

Johansen demostró que, bajo las hipótesis anteriores, los estimadores de máximo verosímil de las relaciones de cointegración pueden encontrarse calculando los autovectores de la matriz de correlaciones de los residuos de las regresiones (vectoriales) de $\Delta \mathbf{y}_t$ y de $\mathbf{y}_{t-1}$ sobre

$$\Delta \mathbf{y}_{t-1}, \Delta \mathbf{y}_{t-2}, \ldots, \Delta \mathbf{y}_{t-p+1}.$$

El algoritmo procede en tres etapas: cálculo de las regresiones auxiliares, cálculo de las correlaciones canónicas de los residuos y cálculo de los estimadores máximo verosímiles.

Método de Johansen

Consideremos la representación del error de correción (20):

$$\Delta \mathbf{y}_t = \zeta_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \zeta_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \alpha + \zeta_0 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{21}$$

Paso 1: Cálculo de regresiones auxiliares.

- Una regresión de $\Delta \mathbf{y}_t$ sobre $(\Delta \mathbf{y}_{t-1}, \Delta \mathbf{y}_{t-2}, \ldots, \Delta \mathbf{y}_{t-p+1})$

  $$\Delta \mathbf{y}_t = \widehat{\Pi}_0 + \widehat{\Pi}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \widehat{\Pi}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2}, + \cdots + \widehat{\Pi}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \widehat{U}_t,$$

  donde $\widehat{\Pi}_i$ matriz nxn denota los coeficientes estimados de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) y $\widehat{U}_t$ nx1 vector de residuales de OLS.
- Una regresión de $\mathbf{y}_{t-1}$ sobre $(\Delta \mathbf{y}_{t-1}, \Delta \mathbf{y}_{t-2}, \ldots, \Delta \mathbf{y}_{t-p+1})$

  $$\mathbf{y}_{t-1} = \widehat{\theta} + \widehat{\aleph}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \widehat{\aleph}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2}, + \cdots + \widehat{\aleph}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \widehat{V}_t,$$

  con $\widehat{V}_t$ nx1 vector de residuales de esta segunda regresión OLS.

Paso 2: Calculo de correlaciones canónicas.

- Calcular las matrices de covarianza muestral de los residuales $\widehat{U}_t$, $\widehat{V}_t$:

$$\widehat{\Sigma}_{VV} \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{V}_t\widehat{V}_t' \quad \widehat{\Sigma}_{UU} \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{U}_t\widehat{U}_t'$$

$$\widehat{\Sigma}_{UV} \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{U}_t\widehat{V}_t' \quad \widehat{\Sigma}_{VU} \equiv \widehat{\Sigma}_{UV}'.$$

Encontrar los eigenvalores de la matriz

$$\widehat{\Sigma}_{VV}^{-1}\widehat{\Sigma}_{VU}\widehat{\Sigma}_{UU}^{-1}\widehat{\Sigma}_{UV}.$$

Ordenar los eigenvalores $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_2 > \cdots > \widehat{\lambda}_n$ y obtener los eigenvectores asociados a los r eigenvalores más grandes $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \ldots, \widehat{\beta}_r$. Finalmente, normalizar los vectores $\widehat{\beta}_i$ tal que $\widehat{\beta}_i'\widehat{\Sigma}_{VV}\widehat{\beta}_i = 1$.

Paso 3: Cálculo de los estimadores máximo verosímiles de los parámetros.
Escribir los primeros r vectores normalizados en una matriz $\widehat{\mathbf{A}}$ de dimensión nx1

$$\widehat{\mathbf{A}} \equiv [\widehat{\beta}_1 \ \widehat{\beta}_2 \ \cdots \ \widehat{\beta}_r]$$

Con este método, Johansen encontró que los estimadores máximo verosímiles son

$$\widehat{\zeta}_0 = \widehat{\Sigma}_{UV}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{A}}', \qquad \widehat{\zeta}_i = \widehat{\Pi}_i - \widehat{\zeta}_0\widehat{\aleph}_i,$$

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\Pi}_0 - \widehat{\zeta}_0\widehat{\theta} \qquad \widehat{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}[(\widehat{U}_t - \widehat{\zeta}_0\widehat{V}_t)(\widehat{U}_t - \widehat{\zeta}_0\widehat{V}_t)'].$$

Johansen propuso 2 tipos de pruebas para r:

⋆ La prueba eigenvalor máximo:

Esta prueba está basada en la razón de máxima verosimilitud $ln[L_{MV}(r)/L_{MV}(r+1)]$, y se efectua secuencialmente para $r = 0, 1, \ldots, n-1$.

Esta prueba corrobora la hipótesis nula de que el rango de cointegración es r versus la alterna de que el rango de cointegración es $r+1$.
El estadístico de prueba es

$$\ell^*_{r+1} - \ell^*_r = -\frac{T}{2} ln(1 - \widehat{\lambda}_{r+1}).$$

Prueba de cointegración

⋆ La prueba de la traza:

Esta prueba se basa en la razón de máxima verosimilitud $ln[L_{MV}(r)/L_{MV}(n)]$ y es efectuada secuencialmente para $r = n - 1, ..., 1, 0$.
Esta prueba comprueba la hipótesis nula de que el rango de cointegración es r frente a la alternativa que el rango de cointegración es n.
El estadístico de prueba es

$$\ell_A^* - \ell_0^* = -\frac{T}{2} \sum_{i=r+1}^{n} log(1 - \widehat{\lambda}_i)$$

Se han tabulado valores para estas pruebas estadísticas para varios cuantíles, hasta $r = 5$ relaciones de cointegración.

Ejemplos

En la paquetería `urca` de `R` se encuentra la función `ca.jo()` para la prueba y estimación del rango de cointegración, esta función regresa la matriz de vectores de integración **A** y la matriz de cargas **B**.

La hipótesis que toma es $\mathfrak{H}_0$: hay a los más r vectores de cointegración.

Ejemplo1: Generar 2 caminatas aleatorias x_t y y_t de tamaño 100, considerar un vector de cointegración $\beta_1 = (1, 0.4)$.

Ejemplo2: Series utilizadas por S. Johansen y K. Juselius para estimar una función de demanda de dinero en Finlandia.
`lrm1`: Logarithm of real money, M1.
`lny`: Logarithm of real income.
`lnmr`: Marginal rate of interest.
`difp`: Inflation rate.

Resultados-Ejemplo1

	Test Eigen. máx.				Test Traza			
	test	10 %	5 %	1 %	test	10 %	5 %	1 %
$r \leq 1$	2.05	6.5	8.18	11.65	2.05	6.50	8.18	11.65
$r = 0$	36.43	12.91	14.9	19.19	38.48	15.66	17.95	23.52

Vectores de cointegración

	β_1	β_2
y	1	1
x	0.417	12.232

Matriz de cargas

$$B = \begin{pmatrix} -0.9700 & 0.0016 \\ 0.0022 & -0.0026 \end{pmatrix}$$

Resultados-Ejemplo2 Test Traza

Test

	test	10 %	5 %	1 %
$r \leq 3$	3.11	6.50	8.18	11.65
$r \leq 2$	7.89	12.91	14.90	19.19
$r \leq 1$	26.64	18.90	21.07	25.75
$r = 0$	38.49	24.78	27.14	32.14

Vectores de cointegración

	β_1	β_2	β_3	β_4
lrm1.l2	1.0000000	1.000000	1.0000000	1.000000
lny.l2	-0.9763252	-1.323191	-0.9199865	1.608739
lnmr.l2	-7.0910749	-2.016033	0.2691516	-1.375342
difp.l2	-7.0191097	22.740851	-1.8223931	-15.686927

Bibliografia

- Hamilton James D., Time series analysis,Princetone University Press,1994.
- Gujaraty Damoar N.,Basic Econometrics,McGraw-Hill, 4ta. Edición,2003.
- Maddala G. S, Kim In-Moo, Unit Roots, Cointegration and Structural Change, Cambridge University Press, 1998
- Murray Michael P. A Drunk and Her Dog: An Illustration of Cointegration and Error Correction, American Statistical Association, Vol. 48, No. 1, 1994.
- Pfaff Bernard, Analysis of integrated and cointegrated time series with R,Springer,2006.

Ejercicio

La prueba de Engle-Granger implica dos pasos: primero estimar los errores de la posible ecuación de cointegración y segundo determinar si la serie de errores estimados es $I(0)$ (estacionario) o no.

Realice la prueba de cointegración de Engle-Granger a las series GDP (gross domestic product) y PDI (personal disposable income) de la base Datos trimestrales.txt.
Sugerencias:

1. Argumenta que las series son $I(1)$.
2. Realice la regresión de PDI sobre GDP y verifique si los residuales son estacionarios o no.
3. Concluya si las series estan cointegradas o no.