Maestría en Probabilidad y Estadística
Curso Propedéutico
Problemas 3

Los problemas 9 y 12 son para entregar el jueves 31/07/14

1. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:

x_i :	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p_i :	0,1	0,2	0,15	0,2	0,1	0,15	0,05	0,05

   Calcule las probabilidades de los siguientes eventos: a. X es negativa. b. X es par. c. X toma valores entre 1 y 5, ambos inclusive. d. $P(X=-2|X \leq 0)$. e. $P(X \geq 2|X > 0)$.

2. Determine el valor de la constante A para que las siguientes sean funciones de probabilidad.

   a. $P(X=i) = \begin{cases} Ai & i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ b. $P(X=i) = \begin{cases} A/2^i & i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ c. $P(X=i) = \begin{cases} A/3^i & i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1 \\ A/4^i & i = 2, 4, 6, \dots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$, y sean U, V, W funciones definidas en Ω por

$$U(\omega) = 5\omega + 32, \qquad V(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } \omega \text{ es impar,} \end{cases} \qquad W(\omega) = \omega^2.$$

   Determine cuáles de estas funciones son variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad Ω.

4. Determine el valor de la constante C para que la siguiente sea una función de probabilidad.

$$P(X = n) = \frac{C}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. ¿Para qué valores de C y α es la función p definida por $p(n) = Cn^\alpha$ para $n \in \mathbb{N}$ una función de probabilidad?

6. Sea X una variable con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, \dots, 50\}$. Calcule

   a. $P(X \geq 15)$, b. $P(2{,}5 < X \leq 43{,}2)$, c. $P(X > 20|X > 10)$, d. $P(X \leq 435{,}6|X > 15)$.

7. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad p dada por:

x_i :	-2	-1	0	1	2	3
p_i :	0,1	0,2	0,15	0,25	0,15	0,15

   Sea Y la variable aleatoria definida por $Y = X^2$. Halle la función de probabilidad de Y. Calcule el valor de la función de distribución de X y de Y en los puntos $1, 3/4$ y $\pi - 3$.

8. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4} \\ 1 & \text{para } \frac{3}{4} \leq x \end{cases}$$

   Determine la función de probabilidad de X.

9. Sea X una variable aleatoria discreta con valores en el conjunto $\{x_i = 1 - 2^{-i}, i \geq 1\}$, con probabilidades respectivas $p_i = 2^{-i}$. Describa la función de distribución asociada. Calcule la probabilidad de que la variable tome valores en los intervalos $(1/2, 7/8]$ y $(3/4, 1]$.

10. En un grupo grande de objetos una fracción θ son defectuosos. Si el número de extracciones (con reposición) necesarias para obtener el primer objeto defectuoso es una variable aleatoria X con función de probabilidad $P(X = j) = A(0{,}95)^{j-1}$, $\quad j = 1, 2, \dots$. a) Calcule el valor de A. b) ¿Cuál es la proporción θ de defectuosos? c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario examinar más de 20 objetos antes de obtener el primer defectuoso?

11. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Seleccionamos dos bolas al azar con reposición de la caja. Sea X el mayor de los dos números, calcule la función de probabilidad de X. Resuelva el problema anterior para el caso de muestreo sin reposición.

12. Para determinar la efectividad de una nueva vacuna contra la gripe se vacunan 10 personas que son observadas por un período de un año. De ellas, 8 no tuvieron gripe durante este lapso. Si se sabe que la probabilidad de no tener gripe en un período de un año es 0.5 ¿cuál es la probabilidad de que 8 o más personas del grupo no hayan sufrido la enfermedad si la vacuna no es efectiva?

13. Considere un cierto defecto en el metabolismo que ocurre en aproximadamente 1 de cada 100 nacimientos. Si cuatro niños nacen en cierto hospital el mismo día, calcule la probabilidad de que a) ninguno tenga el defecto. b) no más de uno tenga el defecto.

14. El número de carros que cruzan un puente durante un período fijo de tiempo es una variable aleatoria con distribución de Poisson. Si la probabilidad de que ningún carro cruce el puente en este período es $1/4$, halle una expresión para la probabilidad de que al menos dos carros lo crucen.

15. Lanzamos un dado hasta que la suma de los resultados sea mayor que 6 y sea X el número de lanzamientos necesarios para conseguir esto. Sea F la función de distribución de esta variable. Determine la función de probabilidad de X y el valor de F para $x = 1, 3$ y 7.

16. En una caja tenemos tres bolas numeradas $1, 2$ y 3. Sacamos tres bolas con reposición y llamamos X_i, $i = 1, 2, 3$ al resultado de la i-ésima extracción. Sea $\overline{X}$ el promedio de estas variables. Determine la función de probabilidad de $\overline{X}$. Calcule la probabilidad de que exactamente dos extracciones sean iguales a 3.

17. Un amigo te propone el siguiente juego: Lanzan una moneda hasta que salga sol. Si el número de lanzamientos es par, tú ganas, si es impar, pierdes. ¿Jugarías este juego?

18. Un vendedor de periódicos compra cada periódico por 1.50 y lo vende por 2.50. Los que no vende los regresa al distribuidor y recibe 1.25 por ellos. Supongamos que la distribución de la demanda D es

$$P(D = k) = \frac{e^{-10}10^k}{k!}$$

    Describa la variable aleatoria X que representa su ganancia diaria si compra 10 periódicos cada día.

19. Un llavero tiene cuatro llaves de apariencia similar pero sólo una de ellas abre la puerta de cierta oficina. Se selecciona al azar una llave y se prueba, si no funciona se selecciona al azar una de las restantes y se prueba de nuevo. Sea X el número de llaves que se prueban antes de encontrar la que abre la puerta. Halle su distribución de probabilidad.

20. Una señal se codifica como una sucesión de ceros y unos para transmitirla digitalmente. Debido a imperfecciones en el canal de transmisión cualquiera de estos dígitos se recibe erroneamente (uno se recibe como cero o cero se recibe como uno) con probabilidad p.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de tener al menos un error en una sucesión de n dígitos?

    b. Para reducir la probabilidad de error cada dígito se repite tres veces. cada dígito en el trío puede trasmitirse erroneamente con probabilidad p y tomamos como valor de cada trío al entero que se repita más veces: 001 lo interpretamos como 0.¿Cuál es la probabilidad de que cualquier dígito se reciba erroneamente? ¿Cuál es la probabilidad de tener al menos un error en una sucesión de n dígitos?

21. Dos jugadores A y B llevan a cabo una serie de juegos de manera independiente. La probabilidad de que A gane es p, la de B es q y la probabilidad de un empate es $1 - p - q$. La serie termina una vez que alguno de los dos gana una partida. Este es un formato común para eliminatorias de 'muerte súbita'.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane en el n-ésimo juego?

    b. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane la serie?

    c. ¿Cuál es la probabilidad de que la serie dure n partidas?

22. Lanzamos un dado repetidamente hasta obtener un seis. Sea A_n el evento que ocurre si el primer seis aparece en el n-ésimo lanzamiento y B el evento que el número de lanzamientos requeridos sea par. Hallar $P(B)$ y $P(A_n|B)$.

23. Sea $X \sim b(n, p)$. Demuestre que $(P(X = k))^2 \geq P(X = k + 1)P(X = k - 1)$ para todo k.