Probabilidad Avanzada I
Lista de Problemas 2

Los problemas 4, 7, 10, 15 y 21 son para entregar el miércoles 21/02/18.

1. (a) Sea $\{A_i, 1 \leq i \leq 5\}$ una partición medible de Ω tal que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 15/64$, $P(A_4) = 1/64$, $P(A_5) = 18/64$. Definimos $B = A_1 \cup A_4$, $C = A_2 \cup A_4$, $D = A_3 \cup A_4$, $D = A_3 \cup A_4$. Verifique que

$$P(B \cap C \cap D) = P(B)P(C)P(D)$$

pero B, C y D no son independientes.

(b) Sea X_1 y X_2 v.a.i. que toman los valores $+1$ y -1 con probabilidad $1/2$. ¿Son X_1, X_2 y X_1X_2 independientes dos a dos? ¿Son variables independientes?

(c) Dé un ejemplo sencillo que muestre que dos variables pueden ser independientes respecto a una medida de probabilidad pero dependientes respecto a otra.

2. Si X, Y son variables independientes y f, g son funciones medibles reales ¿Por qué son independientes $f(X)$ y $g(Y)$? (No hace falta calcular nada).

3. Sean X, Y v.a.i. con valores en $\mathbb{N}$ con $P(X = i) = P(Y = i) = 2^{-i}$, $i \geq 1$. Calcule las siguientes probabilidades.

(a) $P(\text{mín}(X, Y) \leq i)$. (b) $P(X = Y)$. (c) $P(Y > X)$. (d) $P(X \text{ divida a } Y)$. (e) $P(X \geq kY)$ para un entero positivo k dado.

4. ¿Cuál es el menor número de puntos que debe tener un espacio muestral para que existan n eventos independientes $B_1, \dots, B_n$, ninguno de los cuales tiene probabilidad 0 ó 1?

5. Suponga que $(A_n)_{n\geq 1}$ son eventos independientes que satisfacen $P(A_n) < 1$ para todo n. Demuestre que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ sii $P(A_n \ i.v.) = 1$. Dé un ejemplo que demuestre que la condición $P(A_n) < 1$ es necesaria.

6. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.i. Demuestre que $P(\sup_n X_n < \infty) = 1$ sí y sólo sí $\sum_n P(X_n > M) < \infty$ para algún M.

7. Sea $X_n, n \geq 1$ v.a.i. de Bernoulli con $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 17 éxitos seguidos infinitas veces?

8. Si $P(A_n) \geq \varepsilon > 0$ para todo n grande entonces $P(A_n \ i.v.) \geq \varepsilon$.

9. Sean X, Y v.a.i. y suponga que $P(X + Y = \alpha) = 1$, donde α es una constante. Demuestre que tanto X como Y son constantes.

10. Use el lema de Borel-Cantelli para demostrar que dada cualquier sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\geq 1}$ cuyo conjunto de valores sea la recta real, existen constantes $c_n \to \infty$ tales que

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{c_n} = 0) = 1.$$

Dé una descripción detallada de cómo se escogen las constantes c_n.

11. Sea $X_n, n \geq 1$ v.a.i. de Bernoulli con $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ y sea A_n el evento que ocurre si hay n éxitos seguidos entre el ensayo 2^n y el ensayo 2^{n+1}. Si $p \geq 1/2$ demuestre que c. p. 1 ocurren infinitos A_n y si $p < 1/2$ ocurren infinitos A_n con probabilidad 0.

12. Vimos, como consecuencia del lema de Borel-Cantelli que la probabilidad de convergencia de una sucesión de variables aleatorias independientes es igual a 0 ó 1. Si la sucesión (X_n) es i.i.d. y no es constante con probabilidad 1, demuestre que la probabilidad de que la sucesión converja es 0.

13. Use el teorema de Rényi para demostrar que si $X_n, n \geq 1$ son i.i.d. con distribución común continua entonces con probabilidad 1 hay infinitos records.

14. Sea $X_n, n \geq 1$, v.a.i. con $P(X_n = +1) = P(X_n = -1) = 1/2$. (a) Sea $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Demuestre que $Z_n, n \geq 1$ son independientes. (b) Demuestre que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ converge a 0 en probabilidad. (c) Demuestre que $\frac{1}{n^2} S_{n^2}$ converge a 0 c.s.

15. (a) Si $\{X_n, n \geq 1\}$ son v.a.i. demuestre que $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty.$$

(b) Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a.i.i.d. y sea a_n una sucesión de constantes. Demuestre que

$$P([X_n > a_n]\ i.v.) = \begin{cases} 0, & \text{sii} \sum_n P(X_1 > a_n) < \infty \\ 1, & \text{sii} \sum_n P(X_1 > a_n) = \infty \end{cases}$$

(c) Suponga que las X_n son i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que con probabilidad 1

$$\limsup \frac{|X_n|}{\sqrt{2\log n}} = 1.$$

Ayuda: Puede usar la relación de Mill: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(X_n > x)}{\varphi(x)/x} = 1$ donde $\varphi(x)$ es la densidad normal estándar.

(d) Suponga que $X_n, n \geq 1$, son i.i.d. de Poisson con parámetro λ. Demuestre que

$$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \leq P(X_1 \geq n) \leq \frac{\lambda^n}{n!},$$

y por lo tanto, con probabilidad 1,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n/\log(\log n)} = 1.$$

16. Suponga que para cada n el par de v.a. ξ_n, η_n son independientes y $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ puntualmente. Demuestre que ξ, η son independientes de modo que la independencia se conserva cuando tomamos límites.

17. Demuestre: (i) Cualquier variable aleatoria es independiente de una variable degenerada. (ii) Dos eventos disjuntos son independientes si y sólo si uno de ellos tiene probabilidad cero. (iii) Si $P(X = \pm 1,\ Y = \pm 1) = 1/4$ para cualquiera de los cuatro pares de signos, entonces X e Y son independientes.

18. Si X, Y, Z son v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\perp$ denota independencia, demuestre o de contrajemplos para las siguientes relaciones:

(i) $X \perp Y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 \perp Y^2$.

(ii) $X \perp Y,\ X \perp Z \quad \Leftrightarrow \quad X \perp (Y + Z)$.

(iii) $X \perp Y,\ Y \perp Z \quad \Rightarrow \quad X \perp Z$.

(iv) $X \perp (Y, Z),\ Y \perp Z \quad \Rightarrow \quad X, Y, Z$ son independientes.

19. El color de las flores de una planta está determinado por dos genes que la planta recibe de manera independiente de las plantas que la generan. Si los genes son idénticos, las flores son unicolores, del color determinado por los genes. Si estos son diferentes, las flores son veteadas con los colores de ambos genes. Los genes para los colores blanco, rosado y rojo ocurren en la población en la proporción $p : q : r$, donde $p + q + r = 1$. Si los padres de una planta se seleccionan al azar, llamemos A al evento que ocurre si las flores son al menos parcialmente rosadas, y B al evento que ocurre si las flores son veteadas.

(i) Halle $P(A)$ y $P(B)$.

(ii) Demuestre que A y B son independientes si $p = 2/3$ y $r = q = 1/6$.

(iii) ¿Son estos los únicos valores de p, q y r para los cuales A y B son independientes?

20. Halle un ejemplo sencillo de eventos dependientes A_n tales que $\sum P(A_n) = \infty$ pero $P(A_n i.v.) < 1$.

21. Sea X_n una sucesión de v.a. tales que

$$P(X_n = \pm n^3) = \frac{1}{2n^2}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Usando el lema de Borel-Cantelli demuestre que, c.p.1, $\text{lím}_{n\to\infty} X_n = 0$. Calcule $\text{lím}_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n]$. ¿Vale 0? ¿Es posible aplicar el Teorema de Convergencia Dominada? ¿Por qué?

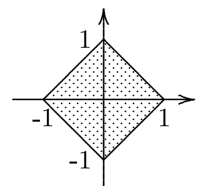
22. Seleccionamos al azar (es decir, con distribución uniforme) un punto en la siguiente región

Sean X e Y las coordenadas del punto.

(a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?

(b) Obtenga la densidad marginal de X.

(c) ¿Son X e Y independientes?



23. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con densidad común de Rayleigh con parámetro $\theta > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Determine la densidad conjunta de $Y_1, \ldots, Y_n$, donde $Y_i = X_i^2$.

(b) ¿Cuál es la distribución de $U =_{1\leq i\leq n} X_i$?

(c) Halle la distribución de $Z = X_1/X_2$.

24. Sea X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que $U = (X+Y)/\sqrt{2}$ y $U = (X-Y)/\sqrt{2}$ también son independientes $\mathcal{N}(0,1)$.

25. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $U[0,1]$, y sean $\theta = \pi(2Y-1)$ y $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$. (a) Demuestre que $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ y que R tiene distribución de Rayleigh de parámetro 1. (b) Demuestre que Z y W, definidas por $Z = R\cos\theta$ y $W = R\sin\theta$ son independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Esta es la base del algoritmo de Box y Muller para generar variables gaussianas.