Nombre: ____

1	2	3	4	5	T

Probabilidad Avanzada I

Segundo Examen Parcial

Sábado 21/04/18.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 4 de las siguientes preguntas

1. (a) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge en probabilidad si y solo si converge con probabilidad 1.

   (b) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. no degeneradas. Demuestre que $P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ converge}) = 0$. ¿Qué sucede si la distribución común es degenerada?

2. (a) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Demuestre que

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} \xrightarrow{c.p.1} \frac{\mu}{\sigma^2 + \mu^2}.$$

   (b) Definimos $(X_n)_{n\geq 1}$ iterativamente de la siguiente manera: X_0 tiene distribución uniforme en $[0, 1]$ y para $n \geq 1$, X_{n+1} tiene distribución uniforme en $[0, X_n]$. Demuestre que $\frac{1}{n} \log X_n$ converge c.s. y halle el límite. (Ayuda: Escriba X_n como un producto).

3. (a) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una colección de variables aleatorias con $X_n \xrightarrow{d} X_0$. Demuestre que existen variables $(Y_n)_{n\geq 0}$ definidas en $[0, 1]$ tales que $X_n \overset{d}{=} Y_n$ para $n \geq 0$ y $Y_n \to Y_0$ casi segurante respecto a la medida de Lebesgue.

   (b) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de v.a. a valores enteros positivos. Demuestre que $X_n \xrightarrow{d} X_0$ si y sólo si para todo entero $k \geq 0$, $P(X_n = k) \to P(X_0 = k)$.

4. (a) Defina convergencia vaga para una sucesión de variables aleatorias. ¿Qué quiere decir que una sucesión de v.a. es tensa?

   (b) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de v.a. con f.d. $(F_n)_{n\geq 0}$ y sea g una función cuyo conjunto de discontinuidades es D. Si $X_n \xrightarrow{d} X_0$ y $F_0(D) = 0$ demuestre que $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X_0)$. En particular el resultado es cierto para cualquier función continua g.

   c) Sea $\varphi(t)$ la función característica de una variables aleatoria. Demuestre que φ es uniformemente continua y definida no-negativa.

5. (a) Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i. con esperanza 0 y terceros momentos finitos. Usando funciones características demuestre que

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)^3 = \mathrm{E}\, X_1^3 + \cdots + \mathrm{E}\, X_n^3.$$

   (b) Recordar que la densidad de la distribución de Cauchy es $1/\pi(1 + x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$ y la de la distribución de Laplace es $e^{-|x|}/2$ para $x \in \mathbb{R}$.

   (i) Si Y_1 y Y_2 son v.a. exponenciales estándar demuestre que su diferencia $Y_1 - Y_2$ tiene distribución de Laplace.

   (ii) Usando el inciso anterior demuestre que la f.c. de la distribución de Laplace es $1/(1 + t^2)$.

   (iii) Usando ahora la fórmula de inversión demuestre que la f.c. de la distribución de Cauchy es $e^{-|t|}$.