Probabilidad Avanzada I
Problemas 2

Los problemas 3, 7, 10, 13 y 26 son para entregar el martes 07/02/12.

1. Sean $X_n,\ n \geq 1$ una sucesión i.i.d. con $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = -1)$. Demuestre que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ converge a 0 en probabilidad. (Ayuda: Sea $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, use la desigualdad de Chebyshev para $P(|S_n| > n\varepsilon)$).
2. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a. Demuestre que $X_n \to X$ c.s. sii $\sup_{k\geq n} |X_k - X| \to 0$ en probabilidad.
3. Sea $X_n, n \geq 1$ variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Demuestre que el conjunto $A = \{\omega \in \Omega :$ la sucesión $X_n(\omega)$ converge $\}$ es un evento, es decir, está en $\mathcal{F}$, y existe una v.a. X tal que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ para $\omega \in A$.
4. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables centradas con varianza finita. Suponga que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$. Demuestre que X_n converge a 0 en L^2 y en probabilidad.
5. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión i.i.d. de variables centradas con varianza finita. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, demuestre que $\frac{1}{n}S_n$ converge a 0 en L^2 y en probabilidad.
6. Suponga que $X_n \to X$ c.s. y $|X| < \infty$ c.s. Sea $Y = \sup_n |X_n|$. Demuestre que $Y < \infty$ c.s.
7. Suponga que $X \in L^1$ y A y A_n son eventos.
   a) Muestre que $\int_{\{|X|>n\}} X dP \to 0$.
   b) Muestre que si $P(A_n) \to 0$, entonces $\int_{A_n} X dP \to 0$.
   (Ayuda: Descomponga, para M grande, $\int_{A_n} |X| dP = \int_{A_n \cap \{|X| \leq M\}} |X| dP + \int_{A_n \cap \{|X|>M\}} |X| dP$).
   c) Demuestre que $\int_A |X| dP = 0$ sii $P(A \cap \{|X| > 0\}) = 0$.
   d) Si $X \in L^2$, muestre que $\mathrm{Var}(X) = 0$ implica que $P(X = \mathrm{E}[X]) = 1$ de modo que X es igual a una constante con probabilidad 1.
   e) Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2$. Definimos la distancia entre conjuntos $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ por $d(A_1, A_2) = P(A_1 \vartriangle A_2)$. Verifique el siguiente resultado: Si $A_n,\ A \in \mathcal{F}$ y $d(A_n, A) \to 0$ entonces
   $$\int_{A_n} X dP \to \int_A X dP$$
   de modo que la función $A \mapsto \int_A X dP$ es continua.
8. Si $X_n \to X$ y $Y_n \to Y$ ambas en probabilidad, entonces $X_n \pm Y_n \to X \pm Y,\ X_n Y_n \to XY$, también en probabilidad.
9. Si $X_n \to X$ y $X_n \to Y$ ambas en probabilidad, entonces $X = Y c.s.$
10. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión monótona de v.a. Si $X_n \to X$ en probabilidad entonces $X_n \to X$ c.s.
11. Sea $\langle X, Y\rangle = \mathrm{E}(XY)$ para variables aleatorias X, Y con varianza finita y defina $||X|| = (\langle X, X\rangle)^{1/2}$. Demuestre que
    (a) $\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$
    (b) $||X + Y||^2 + ||X - Y||^2 = 2(||X||^2 + ||Y||^2$ (La ley del paralelogramo).
    (c) Si $\langle X_i, X_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ entonces $||\sum_1^n X_i||^2 = \sum_1^n ||X_i||^2$.
12. Halle variables aleatorias $X, X_1, X_2, \ldots$ tales que $\mathrm{E}(|X_n - X|^2) \to 0$ cuando $n \to \infty$ pero $\mathrm{E}\,|X_n| = \infty$.
13. (a) Suponga que $X_n \to X$ en $L^p, p \geq 1$. Demuestre que $\mathrm{E}\,|X_n|^p \to \mathrm{E}\,|X|^p$.
    (b) Suponga que $X_n \to X$ en L^1. Demuestre que $\mathrm{E}(X_n) \to \mathrm{E}(X)$. ¿Es cierto el recíproco?
    (c) Suponga que $X_n \to X$ en L^2. Demuestre que $\mathrm{Var}(X_n) \to \mathrm{Var}(X)$.

14. (**Métrica de Lévy**) Dadas dos funciones de distribución F y G definimos

$$d(F,G) = \text{ínf}\{\delta > 0 : F(x-\delta) - \delta \leq G(x) \leq F(x+\delta) + \delta, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

Demuestre que d es una métrica en el espacio de las funciones de distribución y que convergencia respecto a esta métrica equivale a convergencia en distribución.

15. Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a. y sea $c_n, n \geq 1$ una sucesión de números reales que converge a c. Demuestre que si $X_n \to X$ entonces $c_n X_n \to cX$ para convergencia casi segura, en probabilidad, en $L^p, p \geq 1$ o en distribución.

16. Sea X_n una sucesión de v.a.i. que converge en probabilidad al límite X. Demuestre que X es una función constante con probabilidad 1.

17. Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a. con distribución de Poisson de parámetros respectivos λ_n. Demuestre que $\sum_1^\infty X_i$ converge o diverge c.s. según $\sum_1^\infty \lambda_i$ converja o diverja.

18. (**Convergencia completa**) Decimos que una sucesión $X_n, n \geq 1$ de v.a. *converge completamente* a X si $\sum_n P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Demuestre que para variables independientes, convergencia completa equivale a convergencia c.s. De un ejemplo de una sucesión de v.a. dependientes que converja c.s. pero no completamente.

19. Sean X_n y X variables aleatorias a valores reales en L^2 y suponga que $X_n \to X$ en L^2. Demuestre que $\mathrm{E}[X_n^2]$ tiende a $\mathrm{E}[X^2]$. (Ayuda: Use que $|x^2 - y^2| \leq (x-y)^2 + 2|y||x-y|$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

20. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias con $X_n \to X$ en probabilidad. Suponga que $|X_n(\omega)| \leq C$ para alguna constante $C > 0$ y todo ω. Demuestre que $\mathrm{E}[|X_n - X|] \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Ayuda: Demuestre primero que $P(|X| \leq C) = 1$).

21. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i.i.d. con f.d. común F que satisface $F(x_0) = 1,\ F(x) < 1$ para $x < x_0$ con $x_0 < \infty$. Sea $M_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$. Demuestre que $M_n \uparrow x_0$ c.s.

22. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $\mathrm{E}[X_n] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$. Sea $\bar{X} = \sum_1^n X_i/n$. Demuestre que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \to \sigma^2 \quad \text{en probabilidad.}$$

23. Sean $X \geq 0$, $Y \geq 0$ v.a. y $p \geq 0$.

a) Demuestre que $\mathrm{E}[(X+Y)^p] \leq 2^p(\mathrm{E}[X^p] + \mathrm{E}[Y^p])$.

b) Si $p > 1$, el factor 2^p puede ser reemplazado por 2^{p-1}.

c) Si $0 \leq p \leq 1$, el factor 2^p puede ser reemplazado por 1.

24. Si $0 \leq X_n \leq Y_n$ y $Y_n \to 0$ en probabilidad, verifique que $X_n \to 0$ en probabilidad.

25. Definimos $d(A,B) = P(A \triangle B)$ para eventos A y B. Demuestre que $d(A_n, A) \to 0$ sii $\mathbf{1}_{A_n} \to \mathbf{1}_A$ en L^2.

26. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias y sea $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

a) Demuestre que $X_n \to 0$ c.s. implica $S_n/n \to 0$ c.s.

b) Demuestre que $X_n \to 0$ en L^p implica $S_n/n \to 0$ en L^p.

c) Demuestre que $X_n \to 0$ en probabilidad no implica $S_n/n \to 0$ en probabilidad. (Ayuda: Trate $X_n = 2^n$ con probabilidad $1/n$ y 0 con probabilidad $1 - 1/n$).

d) Demuestre que $S_n/n \to 0$ en probabilidad implica que $X_n/n \to 0$ en probabilidad.

27. En un espacio de probabilidad discreto, convergencia en probabilidad equivale a convergencia casi segura.

28. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión i.i.d. de variables centradas con varianza finita. Sea $a_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ y definimos $S_n = \sum_{j=1}^n a_j X_j$. Demuestre que (S_n) es convergente en L^2 sii $\sum_1^\infty a_i^2 < \infty$.

29. Sean $1 \leq p < q < \infty$ para el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ con λ la medida de Lebesgue. ¿Cuál de las siguientes es cierta: $L^p \subset L^q$, $L^q \subset L^p$?

30. Para $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ definimos $||\mathbf{x}||_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Para $p = 1, 2, 3, 4$ haga una gráfica del conjunto de puntos del plano para los cuales $||\mathbf{x}||_p = 1$. ¿A qué tiende este conjunto cuando $p \to \infty$?