Valores Extremos

Problemas 1

Para entregar el jueves 23/9/10

1. Sea F una distribución no-degenerada y suponga que para ciertas constantes $a > 0$, $c > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, se cumple que para todo x,
$$F(ax + b) = F(cx + d).$$
Demuestre que $a = c$ y $b = d$.

2. Considere una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p. Sea ν_p el número de ensayos necesarios para lograr el primer éxito; ν_p tiene distribución geométrica:
$$P(\nu_p \geq n) = (1 - p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$
Demuestre que cuando $p \to 0$, $p\nu_p \Rightarrow \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es una variable exponencial de parámetro 1.

3. Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a.i.i.d. con función de distribución continua, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sea $B \subset \Omega$ el conjunto en el cual $X_m(\omega) = X_n(\omega)$ para algún par de índices distintos m y n; demuestre que $P(B) = 0$. Sacamos ahora B del espacio Ω; esto no cambia las distribuciones conjuntas de las X_n e impide que hayan valores repetidos en la sucesión.

   Decimos que X_n es un *record* de la sucesión si $X_n > \max\{X_i : 1 \leq i < n\}$ y definimos $A_n = \{X_n \text{ es un record }\}$. Definimos también, el rango relativo R_n de X_n entre $X_1, \dots, X_n$ por
$$R_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j \geq X_n\}}$$
de modo que $R_n = 1$ sii X_n es un record, $R_2 = 2$ sii X_n es el segundo mayor entre $X_1, \dots, X_n$, etc.

   Demuestre que las variables R_n, $n \geq 1$ son independientes y
$$P(R_n = k) = \frac{1}{n}$$
para $k = 1, \dots, n$. Obtenga como corolario que la sucesión de eventos A_n $n \geq 1$ es independiente y $P(A_n) = 1/n$.

4. Si $g \geq 0$ satisface $g(x + y) = g(x)g(y)$, es monótona y no es constante, demuestre que $g(x) = e^{ax}$ para todo $x \in (0, \infty)$ y para algún $a \in \mathbb{R}$.

5. Sean X_n y δ_n sucesiones de variables aleatorias. Suponga que existe una f.d. G tal que $X_n \Rightarrow G$ y $\delta_n \to 0$ en probabilidad. Demuestre que $X_n + \delta_n \Rightarrow G$.

6. Halle media y varianza para la distribución de Gumbel $\Lambda(x) = \exp\{e^{-x}\}$, $x \in \mathbb{R}$.

7. ¿Bajo qué condición tiene varianza finita una distribución de Fréchet $\Phi_\alpha(x)$?

8. Para las siguientes distribuciones discretas determine si existe una sucesión (u_n) que satisfaga $n\overline{F}(u_n) \to \tau \in (0, \infty)$:

   a) Binomial Negativa: $P(X = k) = \binom{\nu+k-1}{k-1} p^\nu (1 - p)^{k-1}$, $k \geq 0$, $0 < p < 1$, $\nu \geq 1$.

   b) Logaritmica: $P(X = k) = a\theta^k/k$, $k \geq 1$, $a = -(\log(1 - \theta))^{-1}$.

9. Demuestre que una distribución es max-estable si y sólo si es del mismo tipo que una DVE.

10. Para una v.a. $X > 0$ demuestre las siguientes equivalencias
$$X \text{ tiene f.d. } \Phi_\alpha \Leftrightarrow \log X^\alpha \text{ tiene f.d. } \Lambda \Leftrightarrow -X^{-1} \text{ tiene f.d. } \Psi_\alpha$$