Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas I

Los problemas 6, 7, 12 y 17 son para entregar el lunes 16/02/09.

1. Sean A_1, A_2 y A_3 eventos de un espacio muestral. Expresar mediante uniones, intersecciones y complementos los siguientes eventos:

   a. Los tres eventos ocurren.
   b. Ocurre sólo A_1.
   c. Ocurren A_1 y A_2, pero no A_3.
   d. Ocurre al menos uno de los tres eventos.
   e. No ocurre ninguno.
   f. Ocurren al menos dos.
   g. Ocurren dos y no más.

2. Expresar como uniones disjuntas a) $A_1 \cup A_2$; b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; c) $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

3. Sea $\Omega = \{AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA, SSS\}$. Describa con palabras los siguientes eventos y calcule sus probabilidades:

   a. $B = \{AAA, AAS, ASA, ASS\}$;
   b. $C = \{AAA, SSS\}$.
   c. $D = \{AAS, ASA, SAA\}$;
   d. $E = \{AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA\}$.

4. El evento $A \setminus B$ quiere decir que A ocurre pero B no. Demuestre que las operaciones de unión, intersección y complemento se pueden expresar usando sólo esta operación.

5. Demuestre que para cualesquiera conjuntos $A,\ B,\ C$ y D, la siguiente proposición es cierta:
$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus D).$$

6. Sean $A,\ B$ y C tres eventos. Demuestre las siguientes propiedades:

   a. $P(A \cap B) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + P(A^c \cap B^c) = 1.$
   b. $P(A^c \cap B^c) + P(A) + P(A^c \cap B) = 1.$
   c. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) + P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C) = 1.$
   d. $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c).$

7. Suponga que $P(A) \geq 0{,}9,\ P(B) \geq 0{,}8$ y $P(A \cap B \cap C) = 0$, demuestre que $P(C) \leq 0{,}3$.

8. Demuestre que si $A \cap B \cap C = \emptyset$, entonces
$$P((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

9. Sea D el evento 'exactamente uno de los eventos A, B y C ocurre'. Exprese $P(D)$ en términos de $P(A), P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$ y $P(A \cap B \cap C)$.

10. Demuestre que:

    a. $\min\{1, P(A) + P(B)\} \geq P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$
    b. $\min\{P(A), P(B)\} \geq P(A \cap B) \geq \max\{0, P(A) + P(B) - 1\}$
    c. $P(\cap_1^n A_i) \geq \sum_1^n P(A_i) - (n-1)$.

11. La condición de σ-aditividad para una medida de probabilidad es equivalente a otras propiedades. Pruebe que es equivalente a las proposiones (a) y (b):

    a. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ es una sucesión creciente de eventos y $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ entonces $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
    b. Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ es una sucesión decreciente de eventos y $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ entonces $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

12. Una caja contiene n bolas rojas y n bolas blancas. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan colores distintos. Halle la probabilidad p_n de que las bolas sean del mismo color y evalúe $\lim_{n\to\infty} p_n$.

13. Una caja contiene 10 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen 3 bolas al azar, con reposición. Calcular:

    a. La probabilidad de que sean 2 negras y una roja. b. La probabilidad de que sean las tres negras.

14. Repetir el ejercicio anterior suponiendo que la extracción es sin reposición.

15. Se extraen dos cartas sucesivamente de un juego de 52 cartas. Halle la probabilidad de que la segunda carta sea mayor que la primera.

16. Se lanzan al aire simultáneamente tres monedas balanceadas. Calcular:

    a. La probabilidad de obtener 3 caras. b. La probabilidad de obtener por lo menos 2 caras.

17. Lanzamos una moneda balanceada cuatro veces. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

    a. Ocurren al menos tres Aguilas. b. Ocurren exactamente tres Aguilas.
    c. Ocurren al menos tres Aguilas consecutivas. d. Ocurren exactamente tres Aguilas consecutivas.

18. Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos: a) obtenemos el mismo número en ambos dados; b) la suma es 7 u 11; c) los números son primos relativos, d) la suma es impar; e) el producto es impar; f) un número divide al otro.

19. Se realiza un test de conocimientos con 11 preguntas a contestar por *sí* o *no*. Se da por aprobada la prueba si se contestan correctamente al menos 6 de las 11 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen contestando al azar?

20. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de eventos en un espacio finito. Demuestre que $\mathcal{F}$ no puede contener exactamente 6 eventos. ¿Qué enteros pueden ser el cardinal de $\mathcal{F}$?