Capítulo 5

Continuidad

5.1. Límite de una Función en un Punto

Definición 5.1 Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos, $D \subset X$, $f : D \to Y$ una función, $a \in X$ un punto de acumulación de D y $b \in Y$. Decimos que b es el *límite de la función f en el punto a*, y escribimos

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = b \quad \text{ó} \quad f(x) \to b \quad \text{cuando} \quad x \to a,\ x \in D$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x), b) < \epsilon$ para todo $x \in D$ que satisfaga $0 < d(x, a) < \delta$.

Observamos que el punto $a \in X$ puede no estar en D, y aún si $a \in D$, no necesariamente se tiene que $f(a) = b$.

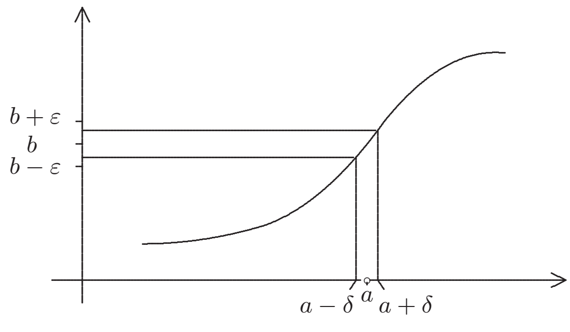

Figura 5.1: Límite de una función en un punto

Veamos que dice esta definición en el caso de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tomando en ambos casos la distancia usual en $\mathbb{R}$ como métrica (ver figura 5.1): $b \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en el punto a, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todo $x \in D$ que satisfaga $0 < |x - a| < \delta$.

Con frecuencia está claro por el contexto cuál es el dominio D en consideración. En este caso omitimos la expresión $x \in D$ en la notación. En particular, si $x = \mathbb{R}$ y D es algún intervalo con extremo izquierdo a (resp. derecho) escribimos

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = b \quad \text{(resp.} \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) = b).$$

En este caso decimos que b es el *límite por la derecha* (resp. *por la izquierda*) de f en a.

Ejemplos 5.1

1. Veamos que $\lim_{x \to 2} 3x - 1 = 5$.

   Dado $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|3x - 1 - 5| < \varepsilon$. Esta última desigualdad es equivalente a $|x - 2| < \varepsilon/3$. Por lo tanto, basta tomar $\delta = \varepsilon/3$. Observamos que en este caso δ depende del valor de ε pero no del valor de $a = 2$.

2. Demuestre que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$.

   En este caso podemos tomar $X = D = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Como queremos que x esté cerca de a, nos interesan valores pequeños de δ, y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\delta < 1$. Por lo tanto, vamos a considerar valores de x que satisfacen

   $$0 < |x - a| < \delta \leq 1. \tag{5.1}$$

   Usando (5.1) tenemos que

   $$\begin{aligned} |x^2 - a^2| &= |(x - a)(x + a)| = |(x - a)(x - a + 2a)| \\ &\leq |x - a|(|x - a| + 2|a|) \\ &\leq |x - a|(1 + 2|a|) \end{aligned}$$

   y queremos que esto sea menor que ε. Por lo tanto basta escoger δ que garantice que

   $$|x - a| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}.$$

   Tomamos

   $$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\}.$$

   Observamos que en este caso, el valor de ε depende del valor de a.

3. Demuestre que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$.

   En este caso podemos tomar $X = Y = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ya que la función $f(x) = x/x$ no está definida en $x = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ queremos hallar $\delta > 0$

de modo que si $0 < |x| < \delta$, se tenga que $|(x/x) - 1| < \varepsilon$. Pero $x/x = 1$ para todo $x \neq 0$, y por lo tanto

$$\left|\frac{x}{x} - 1\right| = |1 - 1| = 0$$

para $x \neq 0$. En este caso, cualquier valor de $\delta > 0$ sirve.

Teorema 5.1 *Sea X un espacio métrico, entonces*

(i) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = b$

si y sólo si

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ *para toda sucesión* (x_n) *en* $D \setminus \{a\}$ *con* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$(ii) Supongamos que $f(x) \to b$ cuando $x \to a,\ x \in D$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $D\setminus\{a\}$, tal que $x_n \to a \ \ (n \to \infty)$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(f(x), b) < \epsilon \quad \text{si} \quad x \in D \quad \text{y} \quad 0 < d(x, a) < \delta.$$

Además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $0 < d(x_n, a) < \delta$. Así , para $n > N$ tenemos $\rho(f(x_n), b) < \epsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos ahora que (i) es falso, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in D$, que depende de δ, para el cual $\rho(f(x), b) \geq \epsilon$ pero $0 < d(x, a) < \delta$. Tomando $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ encontramos una sucesión en D para la cual $f(x_n)$ no converge a b.

■

Corolario 5.1 *Si f tiene límite en a este límite es único.*

Demostración. Esto es consecuencia del teorema anterior y la unicidad de límites para sucesiones en espacios métricos.

■

Teorema 5.2 *Sean X un espacio métrico, a un punto de acumulación de* $D \subset X$, *f y g funciones reales sobre D,* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = c$. *Entonces*

(a) $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = b + c$.

(b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = bc$.

(c) $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{b}{c}$ *si* $c \neq 0$.

Demostración. Esto es consecuencia del Teorema 5.1 y las propiedades de las sucesiones.

■

Ejercicios 5.1

1. *Demuestre que* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ *no existe.*

5.2. Funciones Continuas

Definición 5.2 Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f *es continua en el punto* $a \in X$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(a, x) < \delta \Longrightarrow \rho(f(a), f(x)) < \epsilon.$$

Equivalentemente, f es continua en el punto a si dada cualquier bola de centro $f(a) \in Y$, $B_Y(f(a), \epsilon)$, hay una bola de centro $a \in X$, $B_X(a, \delta)$, tal que $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \epsilon)$ (ver figura 5.2). Observamos que $f(B_X(a, \delta))$ puede no ser una bola, ni ser un abierto en Y, ni contener una bola de centro $f(a)$.

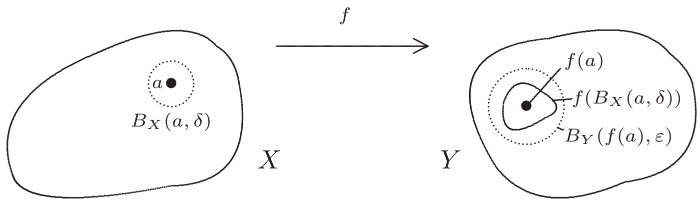

Figura 5.2: Continuidad de la función f en el punto a.

Si f no es continua en a decimos que f es *discontinua* en x, o que tiene una discontinuidad en x.

Si f es continua en todo punto $a \in A \subseteq X$ decimos que es continua en A. Si f es continua en X decimos simplemente que f es continua.

Ejemplos 5.2

1.

Sin embargo, hay que tener cuidado al discutir la continuidad de f en un subconjunto de X. En particular, si $A \subset X$ hay que distinguir entre decir "f es continua en A" y considerar la restricción de f a A: $f|_A$ y afirmar que "$f|_A : A \to Y$ es (d_A, ρ)- continua"donde d_A es la restricción de la métrica d de X a A. En el primer caso el dominio de la función es el espacio X y estamos diciendo que en todos los puntos del subconjunto $A \subset X$ se satisface la definición que hemos dado con la métrica d. En el segundo caso hay que considerar que la función está definida sobre (A, d_A) y entonces la condición "$d(t, x) < \epsilon$" debe modificarse y decir "$t \in A$ y $d(t, x) < \epsilon$".

La primera afirmación implica la segunda pero lo contrario no es cierto. Para ver esto es cómodo usar la definición de continuidad en términos de bolas. Si $x \in A$ y $\epsilon > 0$ entonces para algún $\delta > 0, f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \epsilon)$. Recordando que $f|_A(x) = f(x)$ y que en el espacio (A, d_A) la bola de radio δ y centro x es $A \cap B(x, \delta)$, tenemos

$$f|_A(A \cap B(x, \delta)) \subset f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon) = B(f|_A(x), \epsilon).$$

Para ver que la implicación contraria es falsa podemos considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \quad \text{es irracional} \\ 1 & \text{si} \quad x \quad \text{es racional} \end{cases}$$

entonces f es discontinua en todo punto de $\mathbb{R}$. Sin embargo

$$f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

son funciones constantes y por lo tanto continuas.

El punto que hay que retener es que la continuidad de $f|_A$ en x solo toma en cuenta el comportamiento de la función f en puntos del conjunto A, mientras que la continuidad de f en $x \in A$ también toma en cuenta el comportamiento de f en puntos fuera de A.

La relación entre límites y continuidad es la siguiente:

Teorema 5.3 *Sea $f : X \to Y$ y $x \in X$. f es continua en x si y sólo si se cumple alguna de los siguientes condiciones:*

(i) x es un punto aislado de X.

(ii) x es un punto de acumulación de X y $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$.

Demostración. Si $x \in X$ es un punto aislado de X entonces para algún $\delta > 0, B_X(x, \delta) = \{x\}$ y $f(B_X(x, \delta)) = \{f(x)\} \subset B_Y(f(x), \epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$. Si x es punto de acumulación de X el resultado es obvio comparando las definiciones de límite y continuidad.

■

Corolario 5.2 *$f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Eso es consecuencia de los Teoremas 5.1 y 5.3.

■

Es importante resaltar que, al usar el corolario anterior para mostrar la continuidad de una función f en x, es necesario probar que $f(x_n) \to f(x)$ para toda sucesión (x_n) que converge a x. Si, por ejemplo, consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces para cualquier sucesión $(x_n) \subset \mathbb{Q}$, con $x_n \to 0$ se tiene que $f(x_n) \to 0 = f(0)$ cuando $n \to \infty$ pero f no es continua en 0.

Veamos ahora que la composición de funciones continuas es continua.

Teorema 5.4 *Si (X, d), (Y, ρ) y (Z, τ) son espacios métricos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones continuas entonces $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es continua.*

Demostración. Sea $x \in X$. Si x es un punto aislado, cualquier función es continua en x. Si x es punto de acumulación sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con $x_n \to x$. Como f es continua en x, por el Corolario 5.2 sabemos que $f(x_n) \to f(x)$ y como g es continua en $f(x)$, $g(f(x_n))$ converge a $g(f(x))$, es decir $((g\circ f)(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $(g \circ f)(x)$. Como esto es cierto para toda sucesión x_n que converja a x, de nuevo por el Corolario 5.2 concluimos que $g \circ f$ es continua en x.

■

Teorema 5.5 *Sean f y g funciones continuas del espacio métrico (X, d) en $\mathbb{R}$. Entonces $f + g, fg$ y si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X, f/g$ son continuas.*

Demostración. Esto es consecuencia del Corolario 5.2 y el Teorema 5.2.

■

Corolario 5.3 *El polinomio $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ es continuo en $\mathbb{R}$.*

Corolario 5.4 *Cualquier función racional $P(z)/Q(z)$ donde P y Q son polinomios reales, es continua si $Q(z) \neq 0$.*

Teorema 5.6 *Sea (X, d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y $\phi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. Definimos $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ por*

$$\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x))$$

Φ es continua en $x \in X$ si y sólo si cada ϕ_i es continua en x.

Demostración. Supongamos que Φ es continua en $x \in X$, entonces $\phi_k = P_k \circ \Phi$ donde $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la k-ésima coordenada, definida por $P_k(z_1, \ldots, z_n) = z_k$. Ahora bien, P_k es continua en $\mathbb{R}^n$ porque

$$|z_k - w_k| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |z_i - w_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Usando el Teorema 5.4 concluimos que ϕ_k es continua.

Supongamos ahora que cada ϕ_i es continua en $x \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada $1 \leq i \leq n$ escogemos δ_i de modo que si $d(x, y) < \delta_i$, $|\phi_k(x) - \phi_k(y)| < \epsilon/n$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, entonces si $d(x, y) < \delta$ tenemos

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\phi_i(x) - \phi_i(y)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < (n\epsilon^2/n^2)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$$

de modo que Φ es continua en x.

■

A continuación daremos una caracterización de la continuidad de una función en términos de la imagen inversa de conjuntos abiertos o cerrados. Si $f : X \to Y$ y $A \subset Y$ definimos $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.

Teorema 5.7 *Sea $f : X \to Y$. Las tres proposiciones siguientes son equivalentes:*

(i) f *es continua en* X.

(ii) $f^{-1}(A)$ *es abierto en* X *para todo* $A \subset Y$ *abierto.*

(iii) $f^{-1}(C)$ *es cerrado en* X *para todo* $C \subset Y$ *cerrado.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$ (ii) Supongamos (i) cierta, sea $A \subset Y$ abierto y sea $x \in X$ tal que $f(x) \in A$, es decir, $x \in f^{-1}(A)$; queremos ver que x es un punto interior de este conjunto. Como A es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(f(x), \epsilon) \subset A$ y como f es continua existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \epsilon) \subset A$, es decir $B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(A)$ y x es un punto interior de A.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) es una consecuencia de la siguiente identidad:

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C) \tag{5.2}$$

la cual es válida para cualquier $C \subset Y$ como puede verificarse fácilmente. Si C es cerrado, $Y \setminus C$ es abierto y por (ii) $X \setminus f^{-1}(C)$ también lo es, de modo que $f^{-1}(C)$ es cerrado.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Sea $x \in X$, para $\epsilon > 0$ consideremos $B_Y(f(x), \epsilon) = V_\epsilon$ y sea $U_\epsilon = f^{-1}(V_\epsilon)$, entonces $x \in U_\epsilon$ y $f(U_\epsilon) \subset V_\epsilon$. Veamos que U_ϵ es un abierto, con lo cual concluye la demostración, pues en este caso existe $\delta > 0$ tal que $B_X(x, \delta) \subset U_\epsilon$.

Usando (5.2) con $C = Y \setminus V_\epsilon$ obtenemos

$$U_\epsilon = f^{-1}(V_\epsilon) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V_\epsilon)$$

y como V_ϵ es abierto, $Y \setminus V_\epsilon$ es cerrado, $f^{-1}(Y \setminus V_\epsilon)$ también y U_ϵ es abierto

■

Ejercicios 5.2

1. *Si (X, d) y (Y, ρ) son espacios métricos, $y_0 \in Y$, y $f : X \to Y$ está definida por $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$, entonces f es continua en todo punto de X.*

2. *Si (X, d) es un espacio métrico discreto e (Y, ρ) es cualquier otro espacio métrico, toda función $f : X \to Y$ es continua.*

3. *Si $k \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = kx$, f es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.*

4. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x^3$, f es continua en todo $\mathbb{R}$.*

5. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = [x]$, f es continua en todo punto de $\mathbb{R} - Z$. y discontinua en todo punto de $\mathbb{Z}$.*

6. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y discontinua en 0.*

7. *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está definida por $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \text{ es irracional,}\\ 1-x & \text{si } x \text{ es racional,}\end{cases}$ f es continua en 1/2 y discontinua en cualquier otro punto de $\mathbb{R}$.*
8. *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está definida de la siguiente manera. Si $x=m/n$ donde $m\in\mathbb{Z}\, n\in\mathbb{N}$ y m y n no tienen divisores comunes mayores que 1, definimos $f(x)=1/n$. Si x es irracional, definimos $f(x)=0$. Demuestre que f es continua en los irracionales pero es discontinua en los racionales.*
9. *Definimos $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por $f(0,0)=0,\ f(x,y)=x^2y/(x^6+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$. Entonces f no está acotada en ninguna vecindad de $(0,0)$, pero la restricción de f a cualquier recta L en $\mathbb{R}^2$ es continua.*
10. *Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función continua en (a,b), entonces la función $f_b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f_b(x)=f(x,b)$ es continua en a.*
11. *Sean (X,d) un espacio métrico, $t\in X$ y $f:X\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=d(x,t)$, entonces f es continua en todo X.*

5.3. Continuidad y Compacidad

Las funciones continuas preservan la compacidad:

Teorema 5.8 *Si (X,d), (Y,ρ) son espacios métricos, $f:X\to Y$ es continua y $A\subset X$ es compacto, entonces $f(A)\subset Y$ es compacto; en particular, si X es compacto, f es acotada. (Una función $f:X\to Y$ es acotada si el conjunto $f(X)$ es acotado).*

Demostración. Sea $\{U_\lambda:\lambda\in\wedge\}$ un cubrimiento abierto del conjunto $f(A)$. Como f es continua, cada uno de los conjuntos $f^{-1}(U_\lambda)$ es abierto y $\{f^{-1}(U_\lambda):\lambda\in\wedge\}$ es un cubrimiento de A. Como A es compacto hay una colección finita de índices $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ tales que

$$A\subset f^{-1}(U_{\lambda_1})\cup f^{-1}(U_{\lambda_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{\lambda_n}).$$

Como para cualquier $E\subset Y$ se tiene $f(f^{-1}(E))\subseteq E$, la relación anterior implica

$$f(A)\subset U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n},$$

de modo que $f(A)$ es compacto.

Finalmente, si X es compacto, $f(X)$ es compacto y por el Teorema 4.1 $f(X)$ es acotado.

■

Corolario 5.5 *Sea $f:X\to\mathbb{R}$ una función continua sobre un espacio métrico compacto. Existen u y v en X tales que $f(u)\le f(x)\le f(v)$ para todo $x\in X$.*

Demostración. Por el teorema anterior $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto es cerrado y acotado. Llamemos

$$M=\sup_{x\in X}f(x),\qquad\qquad m=\inf_{x\in X}f(x).$$

Como $f(X)$ es acotado, $m, M \in \mathbb{R}$. Como $f(X)$ es cerrado, tenemos $m \in f(X), M \in f(X)$, de modo que existen u y v en X tales que $f(u) = m, f(v) = M$ y entonces para cualquier $x \in X$

$$m \leq f(x) \leq M.$$

■

Dicho de otra manera, una función real continua definida sobre un compacto alcanza su máximo y su mínimo.

Teorema 5.9 *Sea f una biyección continua de un espacio métrico compacto X sobre un espacio métrico Y. La función inversa f^{-1} definida sobre Y por $f^{-1}(f(x)) = x$, para $x \in X$, es una función continua de Y en X.*

Demostración. Para demostrar que $f^{-1} : Y \to X$ es continua basta, por el Teorema 5.7, demostrar que $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ es un conjunto cerrado en Y siempre que $C \subset X$ sea cerrado. Como C es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, C es compacto (Teorema 4.2). Por el Teorema 5.8, $f(C)$ es compacto y por el Teorema 4.1 es cerrado.

■

Definición 5.3 Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es *uniformemente continua* en X si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(a), f(b)) < \epsilon$ siempre que $d(a, b) < \delta$, $a, b \in X$

Es una consecuencia inmediata de esta definición que si f es uniformemente continua en X entonces es continua en todo punto $x \in X$. Lo contrario es falso en general.

La diferencia entre ambos conceptos está en que, en la definición de continuidad, el δ puede depender tanto de ϵ como de x, mientras que para tener continuidad uniforme δ debe depender sólo de ϵ.

Ejemplo 5.3
Sea $X = Y = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. f es continua en $\mathbb{R}$ pero no es uniformemente continua: tomemos $\epsilon = 1$ y veamos que no hay $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos a, b en X con $|a - b| < \delta$ se tenga que $|f(a) - f(b)| < 1$. Para cualquier $\delta > 0$, escojamos $a > \frac{1}{\delta}$ y $b = a + \frac{\delta}{2}$. Entonces $|b - a| = \frac{\delta}{2} < \delta$, pero $|f(b) - f(a)| = |b^2 - a^2| = |b - a||b + a| > \frac{\delta}{2}\frac{2}{\delta} = 1$. Por lo tanto ningún $\delta > 0$ sirve para todos los puntos a, b en $\mathbb{R}$.

Teorema 5.10 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, (Y, ρ) un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, para cada $x \in X$ existe $\delta(x) > 0$ tal que si $p \in X$ y

$$d(x, p) < \delta(x) \quad \text{entonces} \quad \rho(f(x), f(p)) < \epsilon/2. \tag{5.3}$$

Sea $A(x) = \{p \in X : d(p, x) < \delta(x)/2\} = B_X(x, \frac{\delta(x)}{2})$. Como $x \in A(x)$, la colección $\{A(x) : x \in X\}$ forma un cubrimiento abierto de X y por compacidad hay un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en X tales que

$$X \subset A(x_1) \cup A(x_2) \cup \cdots \cup A(x_n).$$

Definimos $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta(x_1), \delta(x_2), \cdots, \delta(x_n)\}$, entonces $\delta > 0$.

Sean ahora s y t puntos de X tales que $d(s, t) < \delta$. Para algún entero $m, 1 \leq m \leq n$, se tiene que $s \in A(x_m)$, por lo tanto

$$d(s, x_m) < \frac{1}{2}\delta(x_m)$$

y además

$$d(t, x_m) \leq d(t, s) + d(s, x_m) < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_m) \leq \delta(x_m).$$

Usando ahora (5.3) obtenemos

$$\rho(f(s), f(t)) \leq \rho(f(s), f(x_m)) + \rho(f(x_m), f(t)) < \epsilon$$

■

Ejercicios 5.3

1. *Sea $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ una función continua, demuestre que $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ donde $\overline{E}$ es la clausura de E. Muestre con un ejemplo que $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.*
2. *Sean $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ continua y $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Demuestre que $Z(f)$ es cerrado.*
3. *Sean f y g funciones continuas de (X, d) en (Y, ρ) y sea $E \subset X$ denso en X. Pruebe que $f(E)$ es denso en $f(X)$. Si $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$, demuestre que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*
4. *Si f es uniformemente continua sobre los racionales muestre que para todo x real existe $g(x) = \lim_{y \to x, y \in \mathbb{Q}} f(y)$ y es una función uniformemente continua de x.*
5. *Si $f : E \to \mathbb{R}$ es continua donde $E \subset \mathbb{R}$ es cerrado, demuestre que existen funciones continuas g definidas sobre todo $\mathbb{R}$ tales que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. Las funciones g se conocen como extensiones continuas de f a $\mathbb{R}$. Demuestre que el resultado es falso si E no es cerrado.*
6. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua sobre el conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}$, demuestre que f es acotada. Pruebe que la conclusión es falsa si E no es acotado.*
7. *Sea $f : X \to Y$ uniformemente continua, donde X e Y son espacios métricos. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.*
8. *Demuestre que $f : X \to Y$ es uniformemente continua si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $E \subset \mathbb{R}$ con $diam(E) < \delta$ entonces $diam(f(E)) < \varepsilon$.*

9. *Sea $E \subset X$ denso, donde X es un espacio métrico y $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demuestre que f tiene una extensión continua de E a X, donde extensión continua se define como en el ejercicio 22. El ejercicio 14 muestra que la extensión es única. (Ayuda: considere para cada $x \in X$, $B(x, 1/n)$. Muestre usando el ej. 25 que la intersección de las clausuras de los conjuntos $f(B(x, 1/n))$, $n \geq 1$, consiste de un solo punto, que definimos como el valor de la función g en x : $g(x)$. Demuestre que esta función es la extensión deseada de f).*

5.4. Funciones Reales Continuas

En esta sección vamos a estudiar ciertas propiedades de las funciones continuas definidas sobre $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$.

Teorema 5.11 (Teorema del Valor Intermedio)) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y γ es un número entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces, para algún $p \in [a, b], \gamma = f(p)$.*

Demostración. Supongamos $f(a) = \alpha < \beta = f(b)$. La demostración para el caso $\beta < \alpha$ es similar y la omitiremos

Definimos $A = \{x : a \leq x \leq b, f(x) \leq \gamma\}$ y sea $c = \sup A$. Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a c cuando $n \to \infty$. Por la continuidad de f en $c, f(x_n) \to f(c)$ cuando $n \to \infty$. Como $f(x_n) \leq \gamma$ se tiene que $f(c) \leq \gamma$. Por otro lado $f(b) = \beta > \gamma$, de modo que $b \neq c$ y necesariamente $b > c$. Por lo tanto existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en (c, b) que converge a c cuando $n \to \infty$ y por continuidad, $f(y_n) \to f(c)$ cuando $n \to \infty$. Como $y_n > c = \sup A$ e $y_n \in (c, b)$ necesariamente $f(y_n) > \gamma$. Por lo tanto $f(c) \geq \gamma$ y concluimos que $f(c) = \gamma$.

■

Corolario 5.6 *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, a, b son puntos de I y γ es un número entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces hay un punto c entre a y b tal que $f(c) = \gamma$.*

Demostración. Podemos suponer $a < b$, basta considerar la restricción de f al intervalo $[a, b]$ y aplicar al teorema anterior.

■

Podemos resumir el resultado del Teorema 5.11 diciendo que una función real continua definida en un intervalo alcanza cualquier valor que esté entre otros dos valores. Por esta razón se conoce como el Teorema del Valor Intermedio.

Vale la pena observar que como consecuencia de este teorema y su corolario, podemos concluir que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. Esto concuerda con la idea intuitiva que tenemos sobre las funciones continuas como aquellas cuyo gráfico no tiene "huecos".

Ejercicios 5.4

1. *Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x,\ y \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(a) $f(rx) = rf(x)$ para $r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$

(b) Si $f(I)$ es acotado para algún intervalo abierto no vacío, entonces f es continua en 0.

(c) Si f es continua en 0, es continua en $\mathbb{R}$.

(d) Si f es continua en $\mathbb{R}$ entonces $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $a = f(1)$.

2. *Sean f y g funciones reales continuas definidas sobre $[a, b]$ y tales que $f(a) < g(a),\ f(b) > g(b)$. Entonces $f(c) = g(c)$ para algún $c \in [a, b]$.*
3. *Sea $P(x)$ un polinomio de grado impar con coeficientes reales, entonces $P(b) = 0$ para algún $b \in \mathbb{R}$.*
4. *Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua entonces para algún $x \in [0, 1], f(x) = x$.*

5.5. Discontinuidades y Funciones Monótonas

Definición 5.4 Sea $a < b$ en $\mathbb{R}$ y $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Para $c \in [a, b)$ definimos

$$f(c^+) = \lim_{x \downarrow c} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$$

y para $c \in (a, b]$ definimos

$$f(c^-) = \lim_{x \uparrow c} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$$

siempre que estos límites existan en $\mathbb{R}^*$.

Si $a < c < b$, la función f es continua en c si y sólo si $f(c^-) = f(c) = f(c^+)$. Si f es discontinua en c y $f(c^+)$ y $f(c^-)$ existen y son ambos finitos decimos que f tiene una discontinuidad simple o del primer tipo. Esto ocurre cuando se presenta alguna de las siguientes situaciones:

1. $f(c^-) \neq f(c^+)$
2. $f(c^-) = f(c^+) \neq f(c)$

Si f es discontinua en c y la discontinuidad no es simple decimos que es del segundo tipo.

Ejemplos 5.4

1. $f(x) = [x]$. Esta función es continua si x no es entero. Si $x = n \in \mathbb{N}, f(n^+) = f(n) = n, f(n^-) = n - 1$. La función tiene una discontinuidad simple en los enteros.
2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

   Esta función es continua en $x = 0$ y tiene una discontinuidad del segundo tipo en cualquier otro punto.

3. $f(x) = \sin(1/x)$. Esta función no está definida para $x = 0$. Si completamos la definición asignando un valor a $f(0)$, por ejemplo $f(0) = 0$, la función es discontinua en 0 porque ni $f(0^+)$ ni $f(0^-)$ existen. Esta función tiene una discontinuidad del segundo tipo en 0.

Definición 5.5 Una función f es *creciente* si $f(x) \geq f(y)$ siempre que $x \geq y$ y que ambos puntos estén en el dominio de f. La función es *estrictamente creciente* si $f(x) > f(y)$ siempre que $x > y$ y que ambos puntos estén en el dominio de f.

Una función f es *decreciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si $f(x) \leq f(y)$ siempre que $x \geq y$ (resp. $f(x) < f(y)$ siempre que $x > y$,) y ambos puntos estén en el dominio de f. En cualquiera de estos casos decimos que f es *monótona.*

Probaremos a continuación que todas las discontinuidades de una función monótona son simples.

Teorema 5.12 *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ creciente y supongamos que $a < c < b$, entonces*

(i) $f(c^+)$ *y* $f(c^-)$ *existen.*

(ii) $f(c^-) = \sup\{f(x) : a < x < c\}, \quad f(c^+) = \inf\{f(x) : c < x < b\}$.

(iii) $-\infty < f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+) < \infty$.

(iv) Si $a < c < d < b$ entonces $f(c^+) \leq f(d^-)$.

Demostración. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : a < x < c\}$ y $\beta = \inf\{f(x) : c < x < b\}$. Si $a < x < c$ entonces $-\infty < f(x) \leq f(c)$ de modo que $-\infty < \alpha \leq f(c)$. De manera similar $f(c) \leq \beta < \infty$ y para ver (i)-(iii) basta probar que $\alpha = f(c^-)$ y $\beta = f(c^+)$.

Sea $\epsilon > 0$, escojamos x_1 y x_2 tales que $a < x_1 < c < x_2 < b$ y $f(x_1) > \alpha - \epsilon, f(x_2) < \beta + \epsilon$; llamemos $I = (x_1, x_2)$. Entonces $x \in (x_1, c)$ implica

$$\alpha - \epsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \alpha < \alpha + \epsilon,$$

de modo que $\lim_{x\uparrow c} f(x) = \alpha$. Si $x \in (c, x_2)$ entonces

$$\beta - \epsilon < \beta \leq f(x) \leq f(x_2) < \beta + \epsilon$$

y $\lim_{x\downarrow c} f(x) = \beta$.

Para mostrar (iv) escogemos $x \in (c, d)$ y entonces

$$f(c^+) \leq f(x) \leq f(d^-).$$

■

Un resultado similar es cierto para funciones decrecientes.

Corolario 5.7 *Las funciones monótonas no tienen discontinuidades del segundo tipo.*

Este corolario implica que cualquier función monótona tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades:

Teorema 5.13 *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monótona. f es continua excepto en una cantidad numerable de puntos.*

Demostración. Supongamos que f es creciente, la demostración en el caso decreciente es similar. Por el corolario anterior sabemos que las discontinuidades de f sólo pueden ser del primer tipo. Sea D el conjunto de discontinuidades de f:

$$D = \{x \in (a,b) : f(x^-) < f(x^+)\}.$$

Para $x \in D$ sea $I_x = (f(x^-), f(x^+))$ y escojamos $q_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$. El conjunto $\{q_x : x \in D\}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y por lo tanto es numerable.

■

Ejemplo 5.5
Las discontinuidades de una función monótona no tienen por qué ser puntos aislados, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $\{q_n, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ una enumeración de los racionales y definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{q_n<x} 2^{-n}$ donde la suma se lleva a cabo sobre los índices n tales que $q_n < x$. Es posible verificar, y queda como ejercicio para el lector, que f es creciente, $f(q_n^-) = f(q_n) = f(q_n^+)+2^n$ para todo n, y f es continua en $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Además, f es estrictamente creciente: si $x < q_n < y$ entonces $f(x) + \frac{1}{2^n} \leq f(y)$.

En el ejemplo anterior podemos tomar cualquier conjunto infinito numerable $D \subset \mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{Q}$, definiendo $f(x) = 0$ si no existe $d \in D$ con $d < x$. La función que resulta no es estrictamente creciente a menos que D sea denso.

Teorema 5.14 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona. Entonces*

(i) *f es inyectiva.*

(ii) *$f(I)$ es un intervalo abierto.*

(iii) *$f^{-1} : f(I) \to I$ es continua y estrictamente monótona en el mismo sentido que f.*

Demostración. Supongamos que f es estrictamente creciente.

(i) Es inmediato ya que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(ii) Sea $\alpha = \inf_{x\in I} f(x), \beta = \sup_{x\in I} f(x)$ y supongamos que $\alpha \in f(I)$. Sea $u \in I$ tal que $f(u) = \alpha$, como I es abierto existe $x \in I$ tal que $x < u$ y entonces $f(x) < f(u) = \alpha$, lo cual contradice la selección de α. Por lo tanto $\alpha \notin f(I)$. De manera similar $\beta \notin f(I)$. Además, sabemos (ver Corolario 5.6 y los comentarios posteriores) que $f(I)$ es un intervalo y como contiene puntos en cualquier vecindad de α y de β concluimos que $f(I) = (\alpha, \beta)$.

(iii) Para ver que f^{-1} es estrictamente creciente en $f(I)$, sea $y < y'$ en $f(I)$. Si $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$ tendríamos que $y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) = y'$, y por lo tanto $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Para ver la continuidad de f^{-1} en $f(I)$ sea $y \in f(I)$ y V una vecindad de $f^{-1}(y)$. Escogemos c, d en I tales que $c < f^{-1}(y) < d$ y $(c, d) \subset V$, entonces $f(c) < y < f(d)$ y $U = (f(c), f(d))$ es una vecindad de y. Como f^{-1} es creciente, $f^{-1}(U) \subset V$, $\therefore$ f^{-1} es continua en y.

■

Ejercicios 5.5

1. *Si f es monótona sobre $[a, b]$ y g es monótona sobre un dominio que incluye el recorrido de f, entonces $g \circ f$ es monótona.*
2. *Una función $f : X \to Y$ es abierta si $f(V)$ es un conjunto abierto en Y siempre que $V \subset X$ sea abierto. Demuestre que toda función abierta y continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es monótona.*

Ejercicios Complementarios

1. *Si $E \subset X$, $E \neq \varnothing$ definimos la distancia de $x \in X$ a E por $\rho_E(x) = \inf\{d(x, z) : z \in E\}$. Demuestre que $\rho_E(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{E}$. Demuestre que ρ_E es uniformemente continua sobre X mostrando que $|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$ para todo x, y en X.*
2. *Suponga que K y F son conjuntos disjuntos en un espacio métrico X, K es compacto y F es cerrado. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) > \delta$ si $p \in K$, $q \in F$. (Ayuda: ρ_F es continua en K.) Demuestre que la conclusión es falsa para dos conjuntos cerrados disjuntos si ninguno de ellos es compacto.*
3. *Sean A y B subconjuntos disjuntos y no vacíos de un espacio métrico X. Definimos $f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x)+\rho_B(x)}$ para $x \in X$. Muestre que f es una función continua sobre X cuyo recorrido es un subconjunto de $[0, 1]$, $f(x) = 0$ exactamente en A y $f(x) = 1$ exactamente en B. Esto muestra el resultado contrario al ej. 13. Si $V = f^{-1}([0, 1/2))$ y $W = f^{-1}((1/2, 1])$ muestre que V y W son abiertos y disjuntos, $A \subset V$ y $B \subset W$. Por lo tanto pares de conjuntos cerrados disjuntos en un espacio métrico pueden ser cubiertos por un par de abiertos disjuntos. Esta propiedad de los espacios métricos se conoce como normalidad.*