Capítulo 2

Topología de la Recta

2.1. Introducción.

En este capítulo introducimos algunas nociones sobre topología de los espacios métricos. Nuestro interés se limitará en el futuro al caso real o a los espacios euclídeos, pero las definiciones que vamos a considerar y sus consecuencias, se pueden formular sin mayor esfuerzo en el contexto más general de los espacios métricos.

Comenzaremos por definir la noción de distancia o métrica en un espacio general, para luego considerar el caso particular de los espacios euclídeos, que son los espacios de vectores de coordenadas reales con la distancia usual que se obtiene a partir del Teorema de Pitágoras. Luego consideramos en algún detalle, aunque siempre haciendo énfasis en el caso de los espacios euclídeos, y principalmente en el caso de la recta real, los conjuntos abiertos, cerrados y compactos.

2.2. Espacios Métricos.

Definición 2.1 Sea X un conjunto no vacío. Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una *distancia* o una *métrica* si satisface las siguientes condiciones:

(i) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$, $d(x, x) = 0$, para todo $x \in X$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

El par (X, d) se conoce como un *espacio métrico.* La propiedad (iii) se conoce como la *propiedad triangular.*

Es importante resaltar que el espacio métrico es el par formado por el conjunto X y la distancia d. Dado un conjunto X existen muchas distancias que pueden asociársele.

Ejemplos 2.1

1. La *métrica discreta*: Si $X \neq \varnothing$ definimos

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y, \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

   Esta métrica se puede definir en cualquier conjunto no vacío.

2. La *métrica usual* para $\mathbb{R}$. Si $x, y \in \mathbb{R}$ definimos $d(x,y) = |x - y|$. Esta métrica apareció en uno de los ejercicios del capítulo anterior, donde se pedía demostrar la desigualdad triangular. $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, y será el espacio de mayor interés para nosotros.

3. En $\mathbb{R}^2$ definimos la *métrica usual* de la siguiente manera: Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

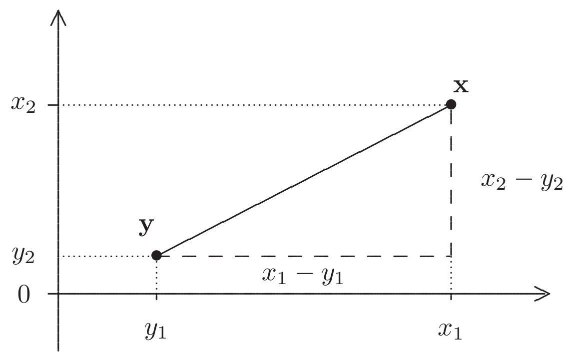


Figura 2.1: La distancia usual en $\mathbb{R}^2$

4. Todo subconjunto Y de un espacio métrico X es, a su vez, un espacio métrico con la misma distancia.

5. Si (X, d) es un espacio métrico y $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ entonces $(X, \alpha d)$ también es un espacio métrico.

6. En $\mathbb{C}$ definimos $\rho(z, w) = |z - w|$, para $z,\ w \in \mathbb{C}$. Si tenemos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ entonces

$$\rho(z, w) = |(a - c, b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

7. Consideremos el conjunto de las funciones $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ para las cuales

$$\sup\{|f(s)| : s \in [0,1]\} < \infty. \tag{2.1}$$

El número $\|f\|_u = \sup\{|f(s)| : s \in [0,1]\}$ se conoce como la *norma uniforme* de f (sobre $[0,1]$). Las funciones para las cuales (2.1) es cierto, son acotadas en $[0,1]$ y las denotaremos por $\mathcal{B}[0,1]$ o simplemente por $\mathcal{B}$. Para $f, g \in \mathcal{B}$ definimos $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$ y para $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)(s) = \alpha(f(s))$. De manera similar definimos fg, $|f|$, etc. especificando su valor para cada $s \in [0,1]$.

Para f y $g \in X$ definimos $d(f,g) = \|f-g\|_u$. Es un ejercicio sencillo verificar que d es una distancia en $\mathcal{B}$, que se conoce como la distancia (o métrica) uniforme.

Ejercicios 2.1

1. *Para* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *definimos*

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Demuestre que d_1 *es una métrica. ¿Cómo se puede extender esta definición para obtener una métrica similar en* $\mathbb{R}^n$, $n > 2$*?*

2. *Repita el ejercicio anterior para* $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}\{|x_i - y_i| : i = 1, 2\}$.

3. *Calcule la distancia entre los siguientes pares de puntos usando (1) la métrica usual en* $\mathbb{R}^2$*, (2) la métrica* d_1 *definida en el ejercicio 1, (3) la métrica* d_2 *definida en el ejercicio 2. Haga los gráficos correspondientes.*
   (i) $\mathbf{x} = (-2, 7), \mathbf{y} = (3, 1)$, *(ii)* $\mathbf{x} = (5, 0), \mathbf{y} = (2, -1)$,
   (iii) $\mathbf{x} = (-4, -4), \mathbf{y} = (1, 1)$.

4. *Si* (X, d_1) *y* (X, d_2) *son espacios métricos, demuestre que* $d_1 + d_2$ *también es una métrica en* X.

5. *Demuestre que* $d(f, g) = \|f - g\|_u$ *definida en el ejemplo 2.1.7 es un métrica en* X.

6. *Suponga que* (X, d) *es un espacio métrico. Muestre que* (X, d') *también lo es donde*

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

2.3. Los Espacios Euclídeos.

Definición 2.2 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^n$ el producto Cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son vectores de dimensión n, es decir, n-uplas ordenadas de números reales: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Si $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos las operaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots,\ x_n + y_n), \\ \lambda \mathbf{x} &= (\lambda x_1, \dots,\ \lambda x_n), \end{aligned}$$

de modo que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Definimos la norma de $\mathbf{x}$ por

$$\|\mathbf{x}\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades.

(a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.

(b) $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$.

(d) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Las tres primeras son obvias, veamos la cuarta. Elevamos al cuadrado ambos miembros de la desigualdad. Por un lado tenemos

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{2.2}$$

y por otro

$$\begin{aligned}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}\tag{2.3}$$

Comparando (2.2) y (2.3) observamos que basta mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

para obtener que

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

y tomando raíz cuadrada en esta última expresión obtenemos (d). Veamos la demostración de (2.4).

Teorema 2.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz.)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|.$$

Demostración. Si todos los x_i valen 0 entonces es cierta la igualdad. Supongamos que por lo menos alguna coordenada x_i no es cero. Definimos la función

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \lambda x_i)^2, \tag{2.5}$$

y observamos que $f(\lambda) \geq 0$ porque es una suma de cuadrados. Definimos también

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

entonces, desarrollando el cuadrado en (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 x_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &= A\lambda^2 - 2B\lambda + C \geq 0, \qquad A > 0 \end{aligned}$$

y esto se satisface para todo valor de λ. Poniendo $\lambda = \frac{B}{A}$ obtenemos

$$A\frac{B^2}{A^2} - 2\frac{B^2}{A} + C \geq 0$$

de donde

$$\frac{AC - B^2}{A} \geq 0.$$

Como $A > 0$ concluimos que $AC \geq B^2$, es decir

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

y tomando raíz cuadrada obtenemos la desigualdad deseada.

■

Definición 2.3 Definimos ahora la distancia entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que se conoce como la *distancia usual* o *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$.

Veamos que efectivamente d es una métrica, para lo cual tenemos que verificar las propiedades de la definición 2.1. (i) es cierto por las propiedades (a) y (b) de la norma. Usando (c) con $\lambda = -1$ tenemos,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(-1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| = |-1| \; \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

y finalmente usando (d):

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{z} - \mathbf{y}\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ejercicios 2.2

1. *Demuestre que la distancia d en un espacio euclídeo satisface las siguientes propiedades:*

   (i) Para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z})$.

   (ii) Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $d(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

2. *En $\mathbb{R}^n$ definimos el* producto interior *o* producto escalar *de dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ por*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   Demuestre que el producto interior satisface las siguientes propiedades:

   (i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

   (ii) $\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \lambda\mathbf{y}$.

   (iii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.

   (iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (v) $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

   (vi) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{4}(||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2)$.

3. *Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ demuestre que*

$$\begin{aligned} \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\} &\leq ||\mathbf{x}|| \leq |x_1| + \cdots + |x_n| \\ &\leq n \cdot \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

   ¿Qué interpretación geométrica tienen estas desigualdades en el caso $n = 2$?

4. *Demuestre que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

   (i) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$.

   (ii) $||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

5. *Decimos que dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son* ortogonales *si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Demuestre que*

   (i) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales si y sólo si $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$.

   (ii) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales si y sólo si $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

   ¿Qué significado geométrico tienen estas propiedades?

2.4. Conjuntos Abiertos.

Definición 2.4 Si (X, d) es un espacio métrico, $a \in X$ y r es un número real positivo, definimos la *bola de radio r y centro a* como

$$B_r(a) = B(a; r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Si es necesario indicar explícitamente la distancia que estamos usando, la notación es $B_d(a; r)$.

Ejemplos 2.2

1. En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, $B(a; r) = (a - r, a + r)$. Es decir, las bolas en $\mathbb{R}$ corresponden a los intervalos abiertos

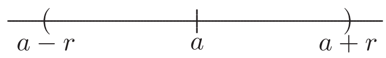


Figura 2.2: $B(a;r)$ en $\mathbb{R}$

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, la bola de centro $\mathbf{a}$ y radio $r > 0$ es
$$\begin{aligned} B(\mathbf{a};r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x},\mathbf{a}) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\} \end{aligned}$$
es decir, es el círculo de centro $\mathbf{a}$ y radio r, sin incluir la circunferencia.

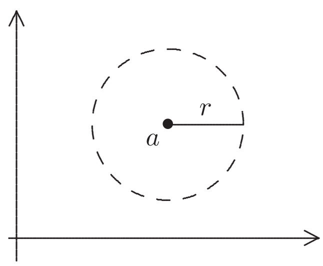
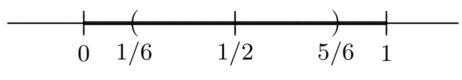


Figura 2.3: $B(a;r)$ en $\mathbb{R}^2$

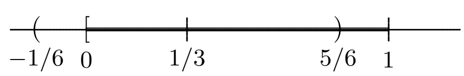
3. En $\mathbb{C}$ con la distancia usual,
$$\begin{aligned} B(a;r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{C} : (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r\} \end{aligned}$$
donde $a = (a_1, a_2)$; de modo que una bola en $\mathbb{C}$ consiste, al igual que en $\mathbb{R}^2$, del círculo de centro a y radio r, sin incluir la circunferencia.

4. Si $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, con la distancia usual,

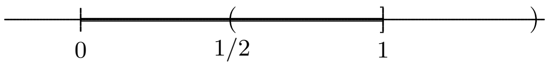
$$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right),$$



$$B\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right) = \left[0,\frac{5}{6}\right),$$



$B\Big(1;\dfrac{1}{2}\Big) = \Big(\dfrac{1}{2},1\Big],$

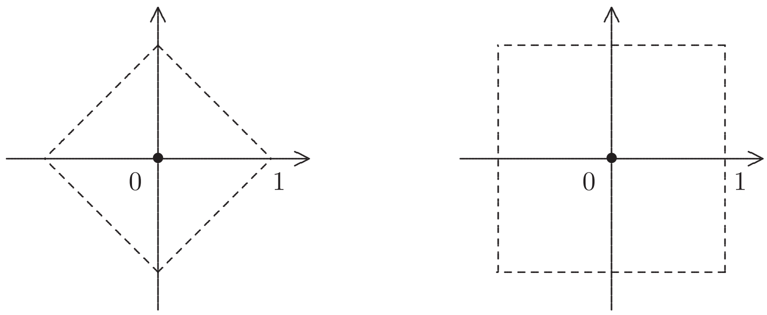


$B(a;2) = X,\ \forall a \in X,$

5. En $\mathbb{R}^2$ con la distancia d_1 que definimos en el ejercicio 2.1.1, la bola de centro $\mathbf{0}$ y radio 1 es

$$\begin{aligned} B_{d_1}(\mathbf{0};1) &= \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) : d_1(\mathbf{x},\mathbf{0}) < 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) : |x_1| + |x_2| < 1\} \end{aligned}$$

que es la región representada en la figura 2.4(a). En general, con esta distancia las bolas tienen forma de rombos.



(a) (b)

Figura 2.4: (a) $B_{d_1}(\mathbf{0};1)$ en $\mathbb{R}^2$ (b) $B_{d_2}(\mathbf{0};1)$ en $\mathbb{R}^2$

En cambio, si usamos la distancia d_2 que definimos en el ejercicio 2.1.2, la bola de centro $\mathbf{0}$ y radio 1 es

$$\begin{aligned} B_{d_2}(\mathbf{0};1) &= \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) : d_1(\mathbf{x},\mathbf{0}) < 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) : \text{máx}\{|x_1|,|x_2|\} < 1\} \end{aligned}$$

que es la región representada en la figura 2.4(b). En general, con esta distancia las bolas tienen forma de cuadrados.

Definición 2.5 Si (X,d) es un espacio métrico, un subconjunto $U \subset X$ es *abierto* (respecto a d) si para cada $a \in U$ existe un número real $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset U$ (r puede depender de a).

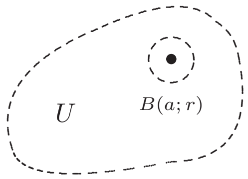


Figura 2.5: Conjunto abierto.

La definición pide que si a es cualquier punto del conjunto U, exista una bola abierta $B(a, r)$, con centro en a que esté contenida totalmente en el conjunto U. El radio r de esta bola normalmente depende de a. En el caso de los números reales, como $B(a, r) = (a - r, a + r)$, lo que estamos pidiendo es que exista un intervalo abierto y simétrico respecto a a que esté totalmente contenido en el conjunto U.

Los ejemplos más simples de conjuntos abiertos son X y $\varnothing$. Veamos otros.

Ejemplos 2.3

1. Los Racionales $\mathbb{Q}$ no son un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ con la métrica usual porque para cualquier racional q, la bola abierta de centro q y radio ε es el intervalo $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$, y vimos en el capítulo 1 que un intervalo de este tipo siempre contiene números irracionales, es decir, números que no están en $\mathbb{Q}$.

2. El intervalo $(0, 1]$ no es abierto porque no existe ningún intervalo de la forma $(1 - r, 1 + r)$ para $r > 0$, que esté totalmente contenido en $(0, 1]$.

Figura 2.6: $(0, 1]$ no es abierto.

En cambio, $(0, 1)$ si es un conjunto abierto porque si tomamos cualquier punto $x \in (0, 1)$ y ponemos $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1 - x\}$, la bola $B(x; r) = (x - r, x + r)$ está contenida en $(0, 1)$.

Otro ejemplo interesante lo da el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Toda bola en un espacio métrico es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $B(a; s)$ una bola en un espacio métrico X y sea $b \in B(a; s)$ (ver fig. 2.7). Queremos hallar $r > 0$ tal que $B(b; r) \subset B(a; s)$. Escogemos $r = s - d(a, b) > 0$. Entonces $x \in B(b; r)$ implica $d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) < d(a, b) + r = s$, de modo que $x \in B(a; s)$.

■

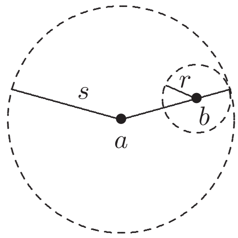


Figura 2.7: Toda bola es un conjunto abierto.

Definición 2.6 Llamamos τ_d a la colección de los conjuntos abiertos en (X, d), que se conoce como la *topología* de (X, d). Como ya hemos visto que X y $\varnothing$ son conjuntos abiertos, están en τ_d.

El siguiente teorema presenta dos propiedades fundamentales de los conjuntos abiertos.

Teorema 2.3 *Sea (X, d) un espacio métrico*

(i) La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos, es un abierto.

(ii) La intersección de cualquier familia finita de subconjuntos abiertos de X, es un abierto.

Demostración.

(i) Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos abiertos de X y $V = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$. Si $V = \varnothing$ entonces es abierto. Si $V \neq \varnothing$ sea $x \in V$, entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$ y como A es abierto existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A \subset V$. Por lo tanto, V es abierto.

(ii) Sea $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una familia finita de subconjuntos abiertos de X y $V = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Si $x \in V$ entonces $x \in A_i$ para todo i. Para cada i existe $r_i > 0$ tal que $B(x; r_i) \subset A_i$. Sea $r = \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$, entonces como

$$B(x; r) \subseteq B(x; r_i) \subset A_i \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

tenemos $B(x; r) \subset V$. Esto concluye la demostración.

■

Observación: La restricción a familias finitas en la segunda parte del teorema es fundamental. En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, cada uno de los conjuntos $\{x : |x| < \frac{1}{n}\} = B(0; \frac{1}{n}) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}$ es abierto, pero su intersección es $\{0\}$, que no es un conjunto abierto.

Ejercicios 2.3
A menos que se especifique lo contrario, en $\mathbb{R}^n$ usamos la métrica usual

1. *Sea $(\mathbb{R}, d)$ con d la métrica discreta. Identifique $B(0; 1/2); B(0; 1); B(0; 2)$.*
2. *Considere $\mathbb{R}$. Dibuje $B(0, 1/2); B(1, 1)$. Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ con la métrica usual. Dibuje $B(0, 1/2)$; $B(1, 1)$ y compare con el resultado anterior.*
3. *Sea $[0, 1] \times [0, 1]$ con la métrica usual. Dibuje $B_{(0,0)}(1); B_{(1/2,0)}(1/2); B_{(0,1/2)}(1/2)$.*
4. *Demuestre que cualquier subconjunto de un espacio métrico discreto es abierto.*
5. *Si $A = (-1, 1)$ y $x = 0,7$, hallar un valor de $\varepsilon > 0$ de modo que $B(x, \varepsilon) \subset A$.*
6. *Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es el interior del cuadrado de centro en el origen y lado 2, hallar un valor de $\varepsilon > 0$ de modo que $B(\mathbf{x}; \varepsilon) \subset A$ donde (i) $\mathbf{x} = (3/4, 0)$, (ii) $\mathbf{x} = (1/2, 1/2)$, (iii) $\mathbf{x} = (-3/4, -1/2)$.*
7. *Si (X, d) es un espacio métrico y $x \in X$, entonces $X \setminus \{x\}$ es abierto.*
8. *El conjunto $[0, 1)$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ pero es un subconjunto abierto de $[0, 1]$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$.*
9. *Mostrar que los siguientes conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}^2$:*
$$\{(x, y) : 1/2 < x^2 + y^2 < 1\}; \quad \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\};$$
$$\{(x, y) : x + y > 0\}; \quad \{(x, y) : xy > 1\}.$$
10. *El conjunto $\{x : 0 < x < 1\}$ es abierto en $\mathbb{R}$ pero $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$ no es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.*
11. *Si A y B son abiertos en $\mathbb{R}$, entonces $A \times B$ es un abierto en $\mathbb{R}^2$. Si Y es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ entonces $\{x : (x, y) \in Y$ para algún $y \in \mathbb{R}\}$ es un abierto en $\mathbb{R}$.*

2.5. Conjuntos Cerrados.

Definición 2.7 Sea (X, d) un espacio métrico. Una *vecindad* o *entorno* de un punto $x \in X$ es cualquier subconjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$.

Si $A \subset X$ y $p \in X$ decimos que p es un *punto de acumulación* de A, si toda vecindad de p contiene un punto de A diferente a p. Denotaremos por A' el conjunto de los puntos de acumulación de A.

Si $p \in A$ y p no es un punto de acumulación de A, decimos que p es un *punto aislado* de A.

Ejemplos 2.4

1. En $\mathbb{R}$ con la métrica usual consideramos el conjunto $C = \{x : 0 \leq x \leq 1 \text{ ó } x = 5\}$. El punto 5 es un punto aislado de C mientras que los puntos del intervalo $[0, 1]$ son todos puntos de acumulación.

2. Consideremos el conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ entonces 0 es un punto de acumulación de A en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, ya que si $r > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nr > 1$ (por la propiedad Arquimedeana) y entonces $\frac{1}{n} \in B(0,r), \frac{1}{n} \neq 0$. Por lo tanto hay un punto de A distinto de 0 en cada vecindad de 0. Observamos que $0 \notin A$. En cambio el punto $\frac{1}{2} \in A$ es aislado. De hecho, todos los puntos de A son aislados.

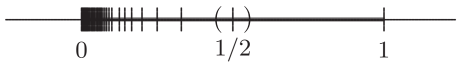


Figura 2.8: 0 es punto de acumulación de A.

Observación: Para verificar que p es punto de acumulación de A basta ver que toda bola de centro p contiene un punto de A distinto de p, ya que si $U \subset X$ es una vecindad de p entonces existe $r > 0$ tal que $B(p;r) \subset U$.

El siguiente teorema nos da una caracterización de los puntos de acumulación.

Teorema 2.4 *Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $p \in X$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *p es punto de acumulación de A.*

(ii) *Toda vecindad de p contiene infinitos puntos de A.*

Demostración (ii) $\Rightarrow$ (i) es evidente. Veamos el recíproco. Supongamos que p es punto de acumulación de A y que hay un entorno U de p que sólo contiene un número finito de puntos de A. Sean $q_1, \ldots, q_n$ estos puntos de $U \cap A$, que son distintos de p y sea

$$r = \min_{1 \leq m \leq n} d(p, q_m).$$

El mínimo de un conjunto finito de números positivos es positivo, de modo que $r > 0$. El entorno $B(p;r/2)$ no contiene ningún punto de A diferente a p. Esta contradicción demuestra el teorema.

$\blacksquare$

Corolario 2.1 *Un conjunto finito no tiene puntos de acumulación.*

Definición 2.8 Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subset X$ que contiene a todos sus puntos de acumulación ($A' \subset A$) es un *conjunto cerrado.* La *clausura* de un conjunto $A \subset X$ es el conjunto

$$\overline{A} = A \cup A' = A \cup \{x \in X : x \text{ es punto de acumulación de } A\}.$$

A es cerrado sí y sólo sí $A = \overline{A}$. Un conjunto $A \subset X$ es *perfecto* si es cerrado y no tiene puntos aislados.

Es importante observar que tal como han sido definidos, los términos *abierto* y *cerrado* no son complementarios ni excluyentes. Si un conjunto no es abierto, no podemos concluir que sea cerrado. Más aún, un conjunto puede ser a la vez abierto y cerrado, como es el caso de los conjuntos X y $\varnothing$.

Ejemplo 2.5
Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X, r > 0$ y $\overline{B}(x; r) = \{y : d(x, y) \leq r\}$. $\overline{B}$ se conoce como la *bola cerrada de centro x y radio r*. Veamos que $\overline{B}$ es un conjunto cerrado: supongamos que p es punto de acumulación de $\overline{B}$, entonces si $\epsilon > 0$ existe $y \in \overline{B},\ y \neq p$ tal que $d(y, p) < \epsilon$. Pero como $y \in \overline{B}$

$$d(p, x) \leq d(p, y) + d(y, x) < \epsilon + r.$$

Es decir, para todo $\epsilon > 0$ se tiene $d(p, x) < r + \epsilon$. En consecuencia $d(p, x) \leq r$, por lo tanto $p \in \overline{B}$ y $\overline{B}$ contiene sus puntos de acumulación.

Teorema 2.5 *Sea (X, d) un espacio métrico y $F \subset X$. F es cerrado si y sólo si $X \setminus F$ es abierto.*

Demostración. Sea F un conjunto cerrado y supongamos que $X \setminus F$ no es abierto, entonces existe $p \in X \setminus F$ tal que ninguna vecindad de p está contenida en $X \setminus F$, es decir, para cada $\epsilon > 0, B(p; \epsilon)$ contiene un punto, digamos x_ϵ, en F. Como $p \notin F, p \neq x_\epsilon$ y entonces cada vecindad de p contiene un punto de F distinto de p. Por lo tanto p es punto de acumulación de F y como F es cerrado, $p \in F$, lo cual es imposible.

Si por el contrario suponemos que $X \setminus F$ es abierto, sea p un punto de acumulación de F. Cada vecindad de p contiene puntos de F y como $X \setminus F$ es abierto no puede ser que $p \in X \setminus F$ porque entonces tendría que haber una vecindad de p dentro de $X \setminus F$ y esta vecindad no podría contener puntos de F. Por lo tanto tenemos que $p \in F$ de donde se deduce que F es cerrado.

■

Teorema 2.6 *Sea (X, d) un espacio métrico. La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados es cerrada, y la unión de cualquier familia finita de conjuntos cerrados es cerrada.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cerrados de X, entonces por el Teorema 2.5, $\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ es una familia de conjuntos abiertos y por el Teorema 2.2, $\cup\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ es un abierto. Como

$$X \setminus \cap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \cup\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$$

usando de nuevo el Teorema 2.5 obtenemos que $\cap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ es cerrado. La segunda parte de la demostración es similar.

■

Definición 2.9 Si $x \in A \subset X$ decimos que x es un *punto interior* de A si x tiene una vecindad $U \subset A$. El conjunto de los puntos interiores de A se denota por A° y se conoce como el *interior* de A. Un conjunto A es abierto sí y sólo sí todos sus puntos son interiores ($A = A^\circ$).

La *frontera* de un conjunto $A \subset X$ es el conjunto $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ (Es posible probar que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$).

A es *acotado* si existe un número real M y un punto $q \in A$ tales que $d(p,q) < M$ para todo $p \in A$.

El conjunto A es *denso* en X, si todo punto de X es punto de acumulación de A o punto de A (o ambas cosas a la vez).

Ejemplos 2.6
Veamos las propiedades de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es abierto, no es cerrado, no es perfecto, es acotado. Su clausura es $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ que es un conjunto cerrado y perfecto. $\partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. $A = \{1, 2, 3\}$. No es abierto, es cerrado y acotado. No es perfecto. $A^\circ = \varnothing, \partial A = A$.

3. $\mathbb{Z}$. Es cerrado, no es abierto, ni perfecto, ni acotado. $A^\circ = \varnothing, \partial A = \mathbb{Z}$.

4. A=$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. No es abierto, ni cerrado, ni perfecto. Es acotado. $A^\circ = \varnothing$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $\partial A = \overline{A}$.

5. $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. No es abierto ni cerrado, $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$, $\overline{Q} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. No es acotado.

6. $\mathbb{R}$ como subconjunto de sí mismo es cerrado, abierto y perfecto. No es acotado. Es denso.

7. $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$ no es abierto, es cerrado, es perfecto, $\mathbb{R}^\circ = \varnothing$, $\partial\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

8. Sea $a < b$ en $\mathbb{R}$. El conjunto (a, b) es abierto en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$. Su clausura es $[a, b]$ en ambos casos. $[a, b]$ es perfecto en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Teorema 2.7 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado superiormente y sea s el supremo de E. Entonces $s \in E$.*

Demostración. Supongamos $s \notin E$. Para todo $h > 0$ existe $x \in E$ tal que $s - h \leq x \leq s$ ya que de otro modo $s - h$ sería una cota superior de E menor que s. Por lo tanto, todo entorno de s contiene un punto $x \in E$, $x \neq s$ ya que $s \notin E$. De esta manera concluimos que s es punto de acumulación de E y no pertenece a E, de modo que E no es cerrado. ■

Ejercicios 2.4

A menos que se especifique lo contrario, en $\mathbb{R}^n$ usamos la métrica usual

1. *En $\mathbb{R}$ mostrar que $A' = [0,1]$ si $A = [0,1]$; $A' = [0,1]$ si $A = (0,1)$; $A' = \varnothing$ si $A = \mathbb{N}$.*
2. *En $\mathbb{R}^2$ hallar el conjunto de puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:*
$$\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad \{(x,y) : x + y = 0\}, \quad \{(\tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}.$$
3. *En cada caso haga una gráfica del conjunto S y, de manera similar a lo que hicimos en los ejemplos 2.6, determine sus propiedades:*
(i) $S = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 < 1$ y $x < 0$ si $y = 0\}$.
(ii) $S = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1$ ó $y = 0$ y $0 \leq x \leq 1\}$.
(iii) $S = \{(x,y)\colon y \geq x^2$ e $y \leq 1\}$.
(iv) $S = \{(x,y)\colon 0 < xy \leq 1$ y $x > 0\}$.
4. *Si (X,d) es un espacio métrico discreto, entonces $A' = \varnothing$ para todo $A \subset X$. Además, todo subconjunto de X es cerrado (ver ejercicio 2.3.4).*
5. *En cualquier espacio métrico (X,d) si $A \subset X$ es finito, entonces $A' = \varnothing$ y A es cerrado.*
6. *Construya un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ que tenga exactamente tres puntos de acumulación.*
7. *Construya un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ que tenga una cantidad numerablemente infinita de puntos de acumulación.*
8. *Si $A \subset \mathbb{R}$ no es vacío, está acotado superiormente y $\sup A \notin A$ entonces $\sup A$ es un punto de acumulación de A y el conjunto de cotas superiores de A es cerrado.*
9. *Muestre que (i) los racionales son densos en los reales. (ii) los irracionales son densos en los reales. (iii) los racionales de la forma $p/2^q$ para p y q en $\mathbb{Z}$ son densos en los reales.*
10. *Muestre que $\overline{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y que A° es la unión de todos los abiertos contenidos en A.*
11. *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $\mathbb{N}$ es un conjunto cerrado, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ no lo es. Los conjuntos $\{x : 0 \leq x < 1\}$, $\{x : 0 < x \leq 1\}$ no son abiertos ni cerrados.*
12. *Mostrar que los siguientes conjuntos son cerrados en $\mathbb{R}^2$:*
$$\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \{(x,y) : x + y = 0\}, \quad \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$$
13. *$\{x : 0 \leq x \leq 1\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $\{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ (compare con el ejercicio 2.3.10).*
14. *Si A y B son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$, entonces $A \times B$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$. Compare con el ejercicio 2.3.11. Observe que no es cierto que si $Y \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado, $\{x : (x,y) \in Y$ para algún $y \in \mathbb{R}\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.*
15. *En cualquier espacio métrico (X,d), X y $\varnothing$ son a la vez abiertos y cerrados. En un espacio métrico discreto todos los conjuntos son abiertos y cerrados. Sin embargo, en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $\mathbb{R}$ y $\varnothing$ son los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. (Suponga que $A \subset \mathbb{R}$ es abierto y cerrado, $A \neq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Sea $a \in A$; ninguno de los conjuntos $B = \{b : b > a, (a,b) \subset A\}$, $C = \{c : c < a, (c,a) \subset A\}$ es vacío (porque A es abierto) y uno de ellos*

es acotado (pues en caso contrario $A = \mathbb{R}$). Digamos que B es acotado y sea $\beta = \sup B$. Muestre que $(a, \beta) \subset A$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus A$ y muestre que como $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto esto da una contradicción).

2.6. Conjuntos Compactos.

Definición 2.10 Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos abiertos de X es un *cubrimiento abierto* de K si

$$K \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Una familia $\mathcal{G}$ es un *subcubrimiento* de K si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un cubrimiento de K. El conjunto K es *compacto* si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito. Si X es compacto decimos que es un *espacio compacto*.

Ejemplos 2.7

1. Sea $S = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, S no es compacto ya que hay cubrimientos abiertos infinitos de S que no tienen subcubrimientos finitos. Por ejemplo

   $$\mathcal{F} = \{(x, 2) : 0 < x < 1\}.$$

   En efecto, supongamos que $\{(x_1, 2), (x_2, 2), \ldots (x_k, 2)\}$ es un subcubrimiento finito de S que obtuvimos a partir de $\mathcal{F}$ y sea $a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Como $x_j > 0$ para $j = 1, \ldots, k$ se tiene que $a > 0$. Por otro lado,

   $$(a, 2) = \cup_{j=1}^{k} (x_j, 2)$$

   Pero ahora vemos que los puntos del intervalo $(0, a) \subset (0, 1]$ no están en el subcubrimiento, lo cual es una contradicción. En conclusión no se pueden extraer de $\mathcal{F}$ subcubrimientos finitos de $(0, 1]$.

2. Cualquier subconjunto finito de cualquier espacio es compacto. En efecto, supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es el conjunto en cuestión. Entonces, dado cualquier cubrimiento de A, para cada punto a_j basta tomar un conjunto del cubrimiento que lo contenga, y así formamos una colección de n conjuntos del cubrimiento que contienen todos los puntos de A, es decir, un subcubrimiento finito.

Teorema 2.8 *Si K es un subconjunto compacto de (X, d) entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración. Veamos que $X \setminus K$ es abierto. Fijemos $q \in X \setminus K$ y para cada $p \in K$ sea $r_p = d(p, q)/4$. Entonces $B(p; r_p) \cap B(q; r_p) = \varnothing$ (ver figura 2.9). La colección $\{B(p; r_p) : p \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K y por lo tanto hay una colección finita de puntos $p_1, \ldots,\ p_n$ de K tales que $B(p_1; r_{p_1}), \ldots, B(p_n; r_{p_n})$ forman un cubrimiento de K, es decir

$$K \subset B(p_1; r_{p_1}) \cup \cdots \cup B(p_n; r_{p_n}) = B.$$

Si definimos

$$C = B(q, r_{p_1}) \cap \cdots \cap B(q; r_{p_n})$$

entonces C es una vecindad de q que no intersecta a B. Por lo tanto $C \subset X \setminus K$ y q es un punto interior de $X \setminus K$. Hemos demostrado que todos los puntos de $X \setminus K$ son interiores y por lo tanto $X \setminus K$ es un abierto.

Para ver que K es acotado sea $p \in K$, la colección $\{B(p; n) : n \in \mathbb{N}\}$ forma un cubrimiento abierto de F y por lo tanto existe un subcubrimiento finito $\mathcal{F}$. Como todas las bolas tienen el mismo centro, la bola de mayor radio en $\mathcal{F}$ cubre a K y por lo tanto este conjunto es acotado.

■

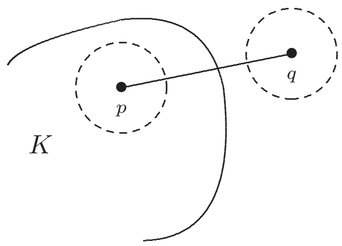


Figura 2.9: $B(p; r_p) \cap B(q; r_p) = \varnothing$

Teorema 2.9 *Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.*

Demostración. Supongamos que $F \subset K \subset X$, F cerrado y K compacto. Sea $\mathcal{F}$ un cubrimiento abierto de F, entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{F^c\}$ es un cubrimiento abierto de K y por compacidad existe un subcubrimiento finito $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ de K, que también cubre a F. Si $F^c \in \mathcal{H}$ podemos sacarlo y lo que nos queda es un cubrimiento finito de F formado a partir de conjuntos de $\mathcal{F}$.

■

Corolario 2.2 *Si F es cerrado y K es compacto, $F \cap K$ es compacto.*

Demostración. Por el Teorema 2.8, K es cerrado y por lo tanto $F \cap K$ es cerrado y además está contenido en K. El teorema anterior implica el resultado.

■

Definición 2.11 Si $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n)$ son puntos de $\mathbb{R}^n$ con $a_j \leq b_j$ para $1 \leq j \leq n$ entonces el *intervalo cerrado* en $\mathbb{R}^n$ determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

Definición 2.12 Si A es un subconjunto del espacio (X, d) definimos el *diámetro* de A como
$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

El siguiente lema es una extensión del Principio de los Intervalos Encajados, que estudiamos en el Capítulo 1.

Lema 2.1 *Sea $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos cerrados en $\mathbb{R}^n$ tales que*

(i) *$I_{k+1} \subset I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$,*

(ii) $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(I_k) = 0$.

Entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{z\}$ para algún $z \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que $I_k = [\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k]$ donde $\mathbf{a}_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,n})$ y $\mathbf{b}_k = (b_{k,1}, \ldots, b_{k,n})$. Para $1 \le j \le n$, la sucesión de intervalos $([a_{k,j}, b_{k,j}])_{k=1}^{\infty}$ satisface las hipótesis del Teorema 1.15, de modo que $\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_{k,j}, b_{k,j}] = \{z_j\}$ para algún $z_j \in \mathbb{R}$. Tomando $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ concluimos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{z\}$. ■

Teorema 2.10 *Todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}^n$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que esto es falso y sean $I_1 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}^n$ que no es compacto y $\mathcal{F}$ un cubrimiento abierto de I_1 que no contiene ningún subcubrimiento finito de I_1. Sea $c_j = (a_j + b_j)/2$, dividimos I_1 en 2^n intervalos cerrados congruentes de la forma $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ donde para cada j se da alguna de las siguientes alternativas: $\alpha_j = a_j$ y $\beta_j = c_j$ ó $\alpha_j = c_j$ y $\beta_j = b_j$.

Para alguno de estos intervalos no existe un subcubrimiento finito por una subfamilia finita de $\mathcal{F}$ porque si no, todo I_1 tendría un subcubrimiento finito. Escogemos I_2 entre estos subintervalos que no poseen subcubrimiento finito. Entonces $I_2 \subset I_1$ y $\operatorname{diam}(I_2) = \operatorname{diam}(I_1)/2$.

Continuando este proceso inductivamente obtenemos una sucesión $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ de intervalos cerrados de $\mathbb{R}^n$ tales que $I_{k+1} \subset I_k$, $\operatorname{diam}(I_{k+1}) = \operatorname{diam}(I_k)/2$ para todo k y ninguna subfamilia finita de $\mathcal{F}$ cubre a I_k. Aplicando el lema anterior, $\cap I_k = \{\mathbf{z}\}$ para algún $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Como $\mathbf{z} \in I_1$ podemos hallar $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{z} \in A$. A es abierto y entonces existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{z}; r) \subset A$. Escogemos k de modo que
$$\frac{1}{2^{k-1}} \operatorname{diam}(I_1) = \operatorname{diam}(I_k) < r.$$

Entonces $I_k \subset A$ y $\{A\} \subset \mathcal{F}$ cubre a I_k, lo cual es una contradicción. ■

El siguiente resultado nos da una caracterización fundamental de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.11 (Heine-Borel) *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, el Teorema 2.8 muestra que K es cerrado y acotado. Por el contrario, si suponemos que $K \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces para algún intervalo cerrado $I = [\mathbf{a},\ \mathbf{b}],\ K \subset I$. Por el Teorema 2.9, K es compacto.

■

El próximo teorema nos da otra caracterización de los conjuntos compactos.

Teorema 2.12 *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *K es compacto.*
2. *Todo subconjunto infinito E de K tiene un punto de acumulación en K.*

Demostración.

(1) ⇒ (2) Si ningún punto de K fuese punto de acumulación de E entonces todo punto $q \in K$ tendría una vecindad V_q que tiene a lo sumo un punto de E (este punto sería q si $q \in E$). Claramente ninguna subcolección finita de $\{V_q\}$ puede cubrir a E y tampoco puede cubrir a K, ya que $E \subset K$. Esto contradice la compacidad de K.

(2)⇒ (1) Por el Teorema de Heine-Borel basta ver que K es cerrado y acotado. Supongamos ahora que K no es acotado, entonces contiene puntos x_n con $\|x_n\| > n$ para $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$ y no tiene ningún punto de acumulación en $\mathbb{R}^k$ y, por tanto, en K, lo cual es una contradicción. Esto muestra que K es acotado.

Si K no es cerrado hay un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que es punto de acumulación de K pero $x_0 \notin K$. Para $n \in \mathbb{N}$ existen puntos $x_n \in K$ con $\|x_n - x\| < 1/n$. Sea $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, S es infinito, tiene a x_0 como punto de acumulación y es fácil ver que no puede tener ningún otro. Vemos entonces que S no tiene puntos de acumulación en K, lo cual, una vez más, es una contradicción. Esto muestra que K es cerrado.

■

Teorema 2.13 (Bolzano - Weierstrass) *Todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Como el conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, para algún intervalo cerrado $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ se tiene $E \subset [\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$. El intervalo $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ es compacto y por el teorema anterior E tiene un punto de acumulación en $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$.

■

Ejercicios 2.5
A menos que se especifique lo contrario, en $\mathbb{R}^n$ usamos la métrica usual

1. *Sea X un espacio y d la métrica discreta en X. Demuestre que los únicos subconjuntos compactos de (X, d) son los subconjuntos finitos.*

2. *Demuestre que $\mathbb{N}$ no es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ con la métrica usual.*
3. *Si $\{K_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio métrico (X, d) tal que la intersección de toda subcolección finita de $\{K_\alpha\}$ no es vacía, entonces $\cap K_\alpha$ no es vacía.*
4. *Si X es el espacio de los racionales con $d(p, q) = |p - q|$ y E es el conjunto de todos los racionales q tales que $2 < p^2 < 3$, demostrar que E es cerrado y acotado pero no es compacto.*
5. *Se dice que un espacio métrico es separable si contiene un subconjunto denso numerable. Demostrar que $\mathbb{R}^k$ es separable.*
6. *Sea (X, d) un espacio métrico en el que cada subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demostrar que X es compacto.*

Ejercicios Complementarios

1. *Sea X un conjunto y d_1, d_2 dos métricas definidas en él. Decimos que estas métricas son equivalentes si existen constantes positivas c y C tales que*

$$cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y).$$

Muestre que la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ (ejemplo 2.1.3) y las métricas d_1 y d_2 definidas en los ejercicios 2.1.1 y 2.1.2 son equivalentes, pero que, en cambio, ninguna de ellas es equivalente a la métrica discreta (ejemplo 2.1.1).

2. *Demuestre que las métricas d y d' del ejercicio 2.1.6 son equivalentes.*
3. *Sea C el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$, es decir, el conjunto que consiste de pares $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ para $0 \leq \theta < 2\pi$. Para $p = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $q = (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$ definimos $d(p, q) = |\theta - \phi|$. Demuestre que (C, d) es un espacio métrico. ¿Es equivalente d a la métrica d_1 definida en el ejercicio 2.1.1?*
4. *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Definimos*

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \quad f, g \in \mathcal{C}.$$

Demuestre que $(\mathcal{C}, d)$ es un espacio métrico. Si en lugar de $\mathcal{C}$ consideramos el conjunto de las funciones acotadas $\mathcal{C}$ que definimos en el ejemplo 1.7, ¿Es d una métrica en este espacio?

5. *Demuestre que cualquier familia de intervalos abiertos disjuntos en $\mathbb{R}$ es numerable.*
6. *En cualquier espacio métrico, un conjunto abierto A puede expresarse como unión de bolas abiertas. (Para $a \in A$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_a)$ está contenido en A).*
7. *Demostrar que todo conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es la unión de una colección a lo sumo numerable de intervalos abiertos.*
8. *Se dice que una colección $\{V_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ de subconjuntos abiertos de (X, d) es una base si se cumple que para todo $x \in X$ y todo conjunto abierto $G \subset X$ tal que $x \in G$ se tiene que $x \in V_\alpha \subset G$, para algún α. En otras palabras, todo conjunto abierto en X es la unión de una subcolección de $\{V_\alpha\}$. Demostrar que todo espacio métrico separable tiene una base numerable. (Indicación: tomar los entornos con radio racional y centro en algún subconjunto denso numerable de X).*

Comentarios.

Bernard Bolzano (1781-1848) de Praga fue uno de los pioneros en el estudio riguroso de los conjuntos y otros temas fundamentales del análisis.

Karl Weierstrass (1815-1897) fue uno de los grandes matemáticos del siglo diecinueve.