Capítulo 1

Los Números Reales

1.1. Introducción.

En este primer capítulo del libro introducimos el sistema de los Números Reales, que es la base sobre la cual se desarrolla el Análisis Matemático. Los matemáticos griegos, cuyo interés fundamental fue la Geometría, sabían que los números racionales, es decir, cocientes de enteros, no bastan para asignar una longitud numérica a cada segmento de recta. En efecto, un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 debe tener, por el Teorema de Pitágoras, una hipotenusa de longitud d con $d^2 = 2$, y es fácil ver que ningún número racional tiene esta propiedad: supongamos $d = a/b$ donde a y b son enteros y no son ambos pares. Si $d^2 = 2$, tenemos $2b^2 = a^2$ y por lo tanto a es par, digamos $a = 2c$, pero entonces $b^2 = 2c^2$ y b también es par, lo cual es una contradicción. Al número que corresponde a la longitud de la hipotenusa de este triángulo (que no es un número racional) lo llamamos *raíz de dos* y lo denotamos $\sqrt{2}$. Para poder incluir estos números es necesario extender el conjunto de los números racionales.

Comenzamos este capítulo postulando la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos llamaremos números reales, junto con las operaciones de suma y multiplicación y una relación de orden, que tomados en conjunto satisfacen trece axiomas. Estos axiomas definen lo que conocemos como un Cuerpo Ordenado Completo, y constituyen la respuesta a la pregunta ¿Qué son los números reales? La prueba de que esta estructura de Cuerpo Ordenado Completo existe (y es única) depende de las hipótesis iniciales. En nuestro caso simplemente listaremos los axiomas que definen a un Cuerpo Ordenado Completo y supondremos la existencia de este objeto.

Es posible seguir un camino constructivo para responder la pregunta del párrafo anterior, es decir, es posible, partiendo de los Números Racionales o incluso de estructuras más elementales como los Números Naturales o axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos, construir un conjunto con operaciones de suma y multiplicación y una relación de orden, que satisfacen los axiomas que vamos a listar en este capítulo y que constituyen lo que conocemos como los Números Reales. Hay varias maneras de hacer esta construcción. En los ejercicios complementarios al final del capítulo presentamos, como problema a resolver, una sucesión de ejercicios que lleva a esta construcción a través del método de Dedekind.

1.2. Axiomas para los Números Reales.

Suponemos la existencia de una cuádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ en la cual:

1. $\mathbb{R}$ es un conjunto,
2. $+$ y $\cdot$ son funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
3. $<$ es una relación en $\mathbb{R}$,

que satisfacen los trece axiomas que listaremos a continuación:

Axiomas para la Suma.

i) **Conmutatividad.**
Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a + b = b + a$.

ii) **Asociatividad.**
Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

iii) **Existencia del Elemento Identidad.**
Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

iv) **Existencia de Elemento Inverso.**
Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $-a + a = 0$.

En lenguaje algebraico estos cuatro axiomas dicen que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano. A partir de estos axiomas podemos obtener otras propiedades de los números reales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.1 (Ley de cancelación para la suma)
Si a, b y c están en $\mathbb{R}$ y $a + b = a + c$ entonces $b = c$.
Demostración. Por (iv) existe el elemento inverso $-a \in \mathbb{R}$ y entonces

	$-a + (a + b) = -a + (a + c)$	
por lo tanto	$(-a + a) + b = (-a + a) + c$	por (ii)
de donde	$0 + b = 0 + c$	por (iv)
y en consecuencia	$b = c$	por (i) y (iii)

■

Ejercicios 1.1

1. *Usando los axiomas (i)-(iv) demuestre lo siguiente*

   a) *Si* $a + b = 0$ *entonces* $b = -a$.

   b) $-(-a) = a$.

   c) $-(a - b) = b - a$. *Por lo tanto* $-0 = 0$.

   d) *Si para algún* $a \in \mathbb{R}, a + b = a$, *entonces* $b = 0$.

Axiomas para la Multiplicación.

v) **Conmutatividad.**
Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.

vi) **Asociatividad.**
Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

vii) **Existencia del Elemento Identidad.**
Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

viii) **Existencia de Elemento Inverso.**
Para todo $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, existe un elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Observamos que estos axiomas son similares a los cuatro iniciales. En efecto, si reemplazamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^{\circ} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $+$ por $\cdot$ en (i) - (iv) obtenemos (v) - (viii) para $(\mathbb{R}^{\circ}, \cdot)$, lo cual muestra que este par es un grupo abeliano. Como consecuencia, cualquier resultado que demostremos para $(\mathbb{R}, +)$ se traduce en un resultado relativo a $(\mathbb{R}^{\circ}, \cdot)$. Así, el ejemplo 1.1 nos dice que:
Si a, b y c están en $\mathbb{R}^{\circ}$ y $a \cdot b = a \cdot c$ entonces $b = c$.

El próximo axioma expresa una relación entre la suma y la multiplicación:

ix) **Distributividad.**
Para a, b y c en $\mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

En lenguaje algebraico, los axiomas (i) - (ix) dicen que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

Ejercicios 1.2

1. *Usando los axiomas (i)-(ix) demuestre lo siguiente*

   a) *Si* $a \neq 0$ *y* $ab = ac$, *entonces* $b = c$.

   b) $0 \cdot a = 0$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

   c) *Si* $ab = 0$ *entonces* $a = 0$ *ó* $b = 0$.

   d) *Si* $a \neq 0$ *entonces* $a^{-1} \neq 0$ *y* $(a^{-1})^{-1} = a$.

   e) *Si* $ab \neq 0$ *entonces* $a \neq 0, b \neq 0$ *y* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

   f) $(-1) \cdot a = -a$.

   g) $(-a) \cdot b = -ab$.

h) $(-a) \cdot (-b) = ab$.

2. *Considere un sistema con dos elementos α y β y las siguientes reglas de suma y multiplicación*

$$\begin{array}{cccc} \alpha + \alpha = \alpha, & \alpha + \beta = \beta, & \beta + \alpha = \beta, & \beta + \beta = \alpha, \\ \alpha \cdot \alpha = \alpha, & \alpha \cdot \beta = \alpha, & \beta \cdot \alpha = \alpha, & \beta \cdot \beta = \beta. \end{array}$$

Demuestre que este sistema forma un cuerpo.

3. *Considere los números de la forma $a + b\sqrt{6}$ donde a y b son racionales. ¿Satisface este conjunto los axiomas de un cuerpo?*

Axiomas para la Relación de Orden.

x) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ es cierta una sola de las siguientes posibilidades:

$$a < 0, \quad a = 0, \quad 0 < a.$$

xi) Si a y b están en $\mathbb{R}$, $0 < a$, $0 < b$ entonces $0 < a + b$ y $0 < a \cdot b$.

xii) Para a y b en $\mathbb{R}$, $a < b$ si y sólo si $a - b < 0$.

Si $a < b$ también escribimos $b > a$. La relación $\leq$ se define por $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ ó $a = b$. Los axiomas (x) y (xii) dicen que $<$ es un orden lineal y (xi) relaciona el orden $<$ con las funciones $+$ y $\cdot$.

Definición 1.1 Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el módulo o valor absoluto $|a|$ se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si no.} \end{cases}$$

Ejercicios 1.3

1. *Usando los axiomas (i)-(xii) demuestre lo siguiente:*

   a) *Para cualesquiera a, b, c en $\mathbb{R}$, $a < b$ y $b < c$ implican $a < c$; $a \leq b$ y $b \leq c$ implican $a \leq c$; es decir, las relaciones $<$ y $\leq$ son transitivas. La relación $\leq$ es reflexiva ($a \leq a$) mientras que $<$ no lo es.*

   b) *Si a y b están en $\mathbb{R}$, $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.*

   c) *Si a, b y c están en $\mathbb{R}$ y $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $c > 0$ entonces $ac > bc$; si $c < 0$ entonces $ac < bc$.*

   d) *Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$. En consecuencia $1 > 0$.*

   e) *Para cualquier a en $\mathbb{R}, a > 0$ si y sólo si $-a < 0$.*

   f) *Si $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$; si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.*

   g) *Para cualesquiera a, b, c en $\mathbb{R}$, $a - b < a - c$ si y sólo si $b > c$.*

h) *Si* a *y* b *están en* $\mathbb{R}$, $a > b > 0$ *implica* $0 < a^{-1} < b^{-1}$, *mientras que* $a < b < 0$ *implica* $b^{-1} < a^{-1} < 0$.

i) *Para cualesquiera* a *y* b *en* $\mathbb{R}$, *con* $a > 0$ *y* $b > 0$, $a > b \Leftrightarrow a \cdot a > b \cdot b$.

j) *Si* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $|-a| = |a|$. *Además,* $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.

k) *Para cualesquiera* a *y* b *en* $\mathbb{R}$, $|ab| = |a||b|, |a + b| \leq |a| + |b|$ *y* $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

l) *Si* a *y* b *están en* $\mathbb{R}$ *y* $b > 0$, *entonces* $|a| < b$ *si y sólo si* $-b < a < b$.

2. *Demuestre que para el sistema definido en el ejercicio 1.2.2 no es posible definir una relación de orden que satisfaga los axiomas (x) - (xii).*

3. *Considere el conjunto descrito en el ejercicio 1.2.3. ¿Satisface este conjunto los axiomas para la relación de orden?*

En lenguaje algebraico los axiomas anteriores expresan el hecho de que $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ es un Cuerpo Ordenado. Por lo tanto las consecuencias de estos axiomas, y en particular los ejercicios 1.1, 1.2 y 1.3, son válidas para cualquier Cuerpo Ordenado, como por ejemplo los Números Racionales. Lo que distingue al cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ de otros cuerpos ordenados como el de los racionales, es el axioma (xiii) de completitud que enunciaremos en la sección 1.6. En las próximas tres secciones consideraremos algunas consecuencias de los primeros doce axiomas.

1.3. Los Números Naturales

En esta sección definiremos y estudiaremos algunas propiedades de los Números Naturales como subconjunto de $\mathbb{R}$. Intuitivamente pensamos en los números naturales como el conjunto que contiene al número 1 y sus sucesores:

$$\{1,\ 1+1,\ 1+1+1, ...\}$$

de modo que 1 es un natural y si n es un número natural, $n+1$ también. La definición que daremos surge de la idea intuitiva de que el conjunto de los números naturales debe ser el menor conjunto de número reales con esta propiedad.

Definición 1.2 Decimos que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es *inductivo* si:
i) $1 \in A$,
ii) $p \in A \Rightarrow p + 1 \in A$.

Como ejemplos tenemos que $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo y también lo es $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$. Es fácil verificar que la intersección de cualquier colección de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo. Sea S la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, definamos

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in S} A$$

es decir,

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R}; x \in I \text{ para todo conjunto inductivo } I \subset \mathbb{R}\}.$$

Los elementos de $\mathbb{N}$ son los números naturales (o enteros positivos). Si A es cualquier subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, entonces $A \in S$ y $\mathbb{N} \subset A$. Además $1 \in \mathbb{N}$, ya que 1 pertenece a todo conjunto inductivo, y por lo tanto $\mathbb{N}$ no es vacío.

Teorema 1.1 (Principio de Inducción Finita) *Si $A \subset \mathbb{N}$ y A es inductivo entonces $A = \mathbb{N}$.*

Demostración. Si A es inductivo entonces $\mathbb{N} \subset A$. Por hipótesis $A \subset \mathbb{N}$ y entonces $A = \mathbb{N}$.

■

Veamos la forma como se utiliza normalmente el principio de inducción finita. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es una proposición y queremos demostrar que todas las proposiciones P_n son ciertas. Definimos $A = \{n : n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ es cierto}\}$, y en consecuencia $A \subset \mathbb{N}$. Queremos ver que $A = \mathbb{N}$ y para esto es suficiente, por el teorema anterior, mostrar que A es inductivo, es decir, que $1 \in A$ y $p + 1 \in A$ si $p \in A$. Por lo tanto, si queremos ver que P_n es cierta para todo n, es suficiente mostrar que

- P_1 es cierto,
- para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si P_n es cierto entonces P_{n+1} es cierto.

Como ejemplo de utilización del Principio de Inducción veamos el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$ entonces $(n - 1) \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Usamos inducción: sea $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N}\}$, basta ver que $A = \mathbb{N}$. Evidentemente $1 \in A$. Supongamos $n \in A$, entonces $(n + 1) - 1 = n \in A \subset \mathbb{N}$, de modo que $(n + 1) \in A$. Por inducción $A = \mathbb{N}$.

■

Teorema 1.3 *Si p y q están en $\mathbb{N}$ entonces*

(1) $p + q \in \mathbb{N}$.

(2) $pq \in \mathbb{N}$.

(3) $p \geq 1$.

(4) *Si $q > p$ entonces $q - p \in \mathbb{N}$.*

(5) *Si $x \in \mathbb{R}$ y $p < x < p + 1$ entonces $x \notin \mathbb{N}$*

Demostración.

(1) Supongamos que $p \in \mathbb{N}$ y sea $A = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } p+n \in \mathbb{N}\}$. Evidentemente basta ver que $A = \mathbb{N}$ y para esto mostraremos que A es inductivo. Como $p \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo, $p + 1 \in \mathbb{N}$ de modo que $1 \in A$. Si $n \in A$ entonces $p + n \in \mathbb{N}$ de modo que $p + (n + 1) = (p + n) + 1 \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $n + 1 \in A$.

Las pruebas de las proposiciones (2), (3) y (4) son similares y quedan como ejercicio. En cada caso hay que mostrar que el conjunto A es inductivo donde

$$A = \{n : n \in \mathbb{N}, np \in \mathbb{N}\} \qquad \text{en el caso (2)},$$

$$A = \{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \qquad \text{en el caso (3)},$$

$$A = \{n : n \in \mathbb{N}, \text{y si } m \in \mathbb{N}, m > n, \text{entonces } m - n \in \mathbb{N}\} \quad \text{en el caso (4)}.$$

(5) Si $x \in \mathbb{N}$, $p < x < p + 1$ y $x \in \mathbb{N}$ entonces por (4) $x - p \in \mathbb{N}$ y por (3) tenemos $x - p \geq 1$, es decir, $x \geq p + 1$ lo que contradice la hipótesis $x < p + 1$. Por lo tanto, la hipótesis $x \in \mathbb{N}$ es falsa.

■

Definición 1.3 Si $A \subset \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ es tal que $a \leq b$ para todo $a \in A$, decimos que b es una *cota superior* para A. Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota superior decimos que A está *acotado superiormente*.

Si $A \subset \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ es tal que $c \leq a$ para todo $a \in A$, decimos que c es una *cota inferior* para A. Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota inferior decimos que A está *acotado inferiormente*. Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superior e inferiormente, decimos que A está *acotado*.

Si $A \subset \mathbb{R}$, un número real b es un *supremo* o una *cota superior mínima* para A si:

1. b es una cota superior para A.

2. No hay cota superior para A que sea menor que b.

Si b es un supremo para A, escribimos $b = \sup A$.

Si $A \subset \mathbb{R}$, un número real c es un *ínfimo* o una *cota inferior máxima* para A si:

1. c es una cota inferior para A.

2. No hay cota inferior para A que sea mayor que c.

Si c es un ínfimo para A escribimos $c = \text{ínf } A$.

Teorema 1.4 (Principio del Buen Orden) *Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ entonces A tiene un ínfimo, es decir, hay un elemento $a \in A$ tal que $p \geq a$ para todo $p \in A$.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que carece de ínfimo. Definimos $S = \{n \in \mathbb{N} : n < a$ para todo $a \in A\}$. Sabemos que $1 \in S$ porque en caso contrario el Teorema 1.3 (3) muestra que 1 es el ínfimo de A. Supongamos que $n \in S$ y que $n+1 \notin S$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \leq n+1$. Como no existe ningún número natural entre n y $n+1$ vemos que $a = n+1$ y a es el menor elemento de A; por lo tanto es el ínfimo de A. Esta contradicción muestra el resultado.

■

Ejercicios 1.4

1. *Demuestre por inducción que* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Demuestre por inducción que* $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demuestre por inducción que* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
4. *Demuestre por inducción la desigualdad de Bernoulli: Si* $x \geq -1$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $(1+x)^k \geq 1 + kx$. *Hay igualdad sólo si* $k = 1$ *ó* $x = 0$.
5. *Sea* $\binom{n}{k}$ *el coeficiente binomial definido por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde n, k *son enteros positivos* (≥ 0), $0 \leq k \leq n$, *y definimos* $0! = 1$. *Demuestre las siguientes afirmaciones.*

$$(a) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (b) \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ para } k > 0.$$

1.4. Los Números Enteros.

Definición 1.4 Un número real x es un *entero* si $x = 0$, $x \in \mathbb{N}$ ó $-x \in \mathbb{N}$. El conjunto de los enteros lo denotamos $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.5 *Si* $m, n \in \mathbb{Z}$ *entonces* $-n \in \mathbb{Z}$, $m + n \in \mathbb{Z}$ *y* $mn \in \mathbb{Z}$.

Demostración Ejercicio.

Definición 1.5 Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^0 = 1$, $x^1 = x$ y $x^{n+1} = x^n x$ para $n \in \mathbb{N}$. Si $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos $x^{-n} = 1/x^n$.

Teorema 1.6 (Leyes de los Exponentes) *Sean* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $m, n \in \mathbb{Z}$.

(1) $x^m x^n = x^{m+n}$.

(2) $x^n y^n = (xy)^n$.

(3) $(x^m)^n = x^{mn}$.

(4) *Si* $n > 0,\ x > 0,\ y > 0$ *entonces* $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Demostración. Todas las proposiciones pueden demostrarse fijando $x,\ y$ y m y haciendo inducción en n, considerando los casos $n \geq 0$ y $n < 0$ por separado. Los detalles quedan como ejercicio.

■

1.5. Números Racionales e Irracionales.

Definición 1.6 Un *número racional* es un número real x que puede expresarse en la forma $x = m/n$, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. El conjunto de los racionales se denota por $\mathbb{Q}$. Los números en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se llaman *números irracionales.*

El siguiente teorema puede deducirse fácilmente de las propiedades de los enteros.

Teorema 1.7 *Si* $x, y \in \mathbb{Q}$*, entonces* $-x, x + y, xy$ *y* x^{-1}*(para* $x \neq 0$*) también son racionales. Por lo tanto,* $\mathbb{Q}$ *también es un cuerpo.*

Más aún, en $\mathbb{Q}$ también hay una relación de orden que satisface los axiomas (x), (xi) y (xii), de modo que $(Q, +, \cdot, <)$ es un Cuerpo Ordenado.

1.6. El Axioma de Completitud.

Hasta ahora hemos visto los primeros doce axiomas para los números reales y algunas de sus consecuencias. El último axioma, conocido como Axioma de Completitud, es el objeto de esta sección. Para completar el argumento que vamos a desarrollar como introducción, necesitamos herramientas, como la propiedad arquimediana, que aun no hemos demostrado. Sin embargo, el argumento es intuitivamente claro y nos sirve para motivar el último axioma de los números reales.

Consideremos en $\mathbb{Q}$ el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$. Este conjunto está acotado superiormente: por ejemplo, 2 es una cota superior de este conjunto. Más aún, cualquier elemento de $\mathbb{Q}$ que sea mayor que $\sqrt{2}$ es una cota superior del conjunto. Por otro lado, cualquier racional z que sea menor que $\sqrt{2}$ es un elemento del conjunto y no es cota superior de él, ya que entre z y $\sqrt{2}$ hay otros racionales, que también están en A. En consecuencia, cualquier racional que esté por encima de $\sqrt{2}$ es cota superior del conjunto A, mientras que ningún racional que esté por debajo de $\sqrt{2}$ es cota superior. Ahora la pregunta es si este conjunto tiene un supremo en $\mathbb{Q}$, es decir, si hay en $\mathbb{Q}$ una cota superior que sea menor que todas las otras cotas superiores.

La respuesta es no. Cualquier número racional w mayor que $\sqrt{2}$ es cota superior del conjunto, pero no es *la menor* cota superior: si $w \in \mathbb{Q},\ w > \sqrt{2}$ entonces siempre existe $w' \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{2} < w' < w$, es decir, siempre existe otro racional menor que w que también es cota superior de A. Por otro lado, cualquier racional menor que $\sqrt{2}$ no es cota superior, como hemos visto.

Si hubiera un supremo de A en $\mathbb{Q}$, tendría que coincidir con $\sqrt{2}$, pero ya hemos visto que este no es un número racional. Por lo tanto, en $\mathbb{Q}$ este conjunto no tiene un supremo. En cambio, en $\mathbb{R}$ sí: $\sqrt{2}$. Esta es la diferencia fundamental entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, que se expresa en el último axioma para los números reales.

xiii) **Axioma de Completitud**

Si $A \subset \mathbb{R}$ no es vacío y está acotado superiormente entonces A tiene un supremo.

Podemos ahora dar una definición de los números reales: Son un conjunto de números $\mathbb{R}$ con dos operaciones $+$ y $\cdot$ y una relación de orden $<$, que satisfacen los trece axiomas que hemos listado.

Veamos una consecuencia inmediata del Axioma de Completitud.

Teorema 1.8 *Si $A \subset \mathbb{R}$ no es vacío y está acotado inferiormente entonces A tiene un ínfimo.*

Demostración. Sea $B = \{b \in \mathbb{R} : b \text{ es una cota inferior para } A\}$. Entonces B no es vacío porque A está acotado inferiormente. Además, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $b \leq a$ de modo que B está acotado superiormente. Por el Axioma de Completitud B tiene un supremo. Sea $\ell = \sup B$, entonces, por definición de supremo, ℓ es una cota superior para B y por lo tanto

1. $\ell \geq b$ para todo $b \in B$,

y como todo $a \in A$ es cota superior de B,

2. $\ell \leq a$ para todo $a \in A$.

Estas dos propiedades muestran que $\ell = \operatorname{ínf} A$.

■

A continuación damos una formulación equivalente del axioma de completitud:

Teorema 1.9 (Dedekind) *Supongamos que A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \cup B = \mathbb{R}$ y si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a < b$. En este caso existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que si $x > \alpha$ entonces $x \in B$ y si $x < \alpha$ se tiene que $x \in A$.*

Demostración. El conjunto A no es vacío y por hipótesis todo elemento de b es cota superior de A. Como $B \neq \varnothing$ sabemos que A está acotado superiormente. Por el Axioma de Completitud, A tiene un supremo. Sea $\alpha = \sup A$, entonces como α es cota superior para A, $a \leq \alpha$ para todo $a \in A$ y como todo elemento de B es una cota superior de A, $\alpha \leq b$ para todo $b \in B$.

Si $x > \alpha$ entonces $x \in B$ ya que en caso contrario $x \in A$ y tendría que ser cierto que $x \leq \alpha$. De manera similar, si $x < \alpha$, $x \in A$ y la prueba termina.

■

Retomando el ejemplo sobre el conjunto de números racionales con el que iniciamos esta sección, $\sqrt{2}$ corresponde al α del teorema, que está en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$.

Veamos ahora que, recíprocamente, el Teorema de Dedekind implica el Axioma de Completitud. Supongamos cierto el Teorema 1.9 y sea $A' \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Queremos ver que A' tiene un supremo.

Si A' tiene una cota superior b que pertenece a A' entonces $b = \sup A'$ y no hay nada que probar.

Supongamos entonces que ninguna cota superior de A' está en A' y definamos $B = \{b \in \mathbb{R} : b \text{ es cota superior de } A'\}$. Como A' está acotado superiormente por hipótesis, $B \neq \varnothing$ y si definimos $A = \mathbb{R} \setminus B$ entonces $A' \subset A$ y $A \neq \varnothing$. Además si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a \neq b$ de modo que $a < b$ ó $a > b$. Pero b es una cota superior de A' y si $a > b$ tendríamos que a también es cota superior de A' y $a \in B$, lo cual es imposible. Por lo tanto si $a \in A$ y $b \in B, a < b$. Por el Teorema 1.9 concluimos que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x > \alpha \Longrightarrow x \in B$ y $x < \alpha \Longrightarrow x \in A$.

Si $x \in A'$ entonces $x \in A$ y $x \leq \alpha$ (en caso contrario $x > \alpha$ y $x \in B$) de modo que α es una cota superior para A'. Si b es una cota superior para A', $b \in B$ y $b \geq \alpha$ (en caso contrario $b < \alpha$ y $b \in A$) de modo que α es un supremo para A y el Axioma de Completitud es cierto.

■

El siguiente teorema nos da una consecuencia importante del Axioma de Completitud.

Teorema 1.10 (Propiedad Arquimediana) *Si $x > 0$, para cualquier $y \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Demostración. Sea $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ y supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Entonces $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que el conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ no es vacío y está acotado superiormente. En consecuencia A tiene un supremo. Sea $a = \sup A$ entonces si $n \in \mathbb{N}$, $nx = (n+1)x - x \leq a - x$ de modo que $a - x < a$ es una cota superior para A. Esta contradicción muestra que la hipótesis $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es falsa.

■

Cualquier cuerpo ordenado que posea la propiedad enunciada en el teorema anterior es un Cuerpo Arquimediano. Hay cuerpos ordenados que no son Arquimedianos y hay cuerpos Arquimedianos que no son completos.

Podemos obtener las siguientes conclusiones del Teorema 1.10. Tomando $x = 1$, si $y \in \mathbb{R}$ hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > y$, es decir, hay enteros positivos arbitrariamente grandes.

Por otro lado tomando $y = 1$, si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < x$. (Esto quiere decir que la sucesión $\{1/n\}$ toma valores arbitrariamente pequeños).

Teorema 1.11 (Densidad de los Racionales) *Si a y b son números reales con $a < b$ entonces hay un racional r tal que $a < r < b$.*

Demostración. Supongamos primero que $a > 0$. Por el Teorema 1.10. hay un entero positivo n tal que $n(b-a) > 1$, es decir, $nb > na + 1$. De nuevo por el Teorema 1.10 el conjunto $\{m : m \in \mathbb{N},\ m > na\}$ no es vacío y por el buen ordenamiento de los naturales tiene un mínimo elemento p, es decir, hay un entero positivo p tal que $p > na \geq p - 1$. Por lo tanto

$$nb > na + 1 \geq p > na$$

y si ponemos $r = pn^{-1}$ tenemos $a < r < b$. Si $a = 0$ entonces $0 < b/2 < b$ y por lo que acabamos de ver hay un racional r tal que $0 = a < b/2 < r < b$. Si $a < 0$ entonces $a < 0 < b$, y en este caso el Racional 0 satisface la proposición, ó $0 \leq |b| < |a|$ y en este caso hay un racional r entre $|b|$ y $|a|$ y $a < -r < b$. ■

Ejercicios 1.5

1. *Si b y c son supremos del conjunto A, entonces $b = c$. Mostrar lo mismo para ínfimos.*
2. *Si $A \subset \mathbb{R}$, $b = \sup A$ si y sólo si b es cota superior para A y dado $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $b - e < a \leq b$.*
3. *Si b es cota superior para el conjunto A y $b \in A$, entonces $b = \sup A$.*
4. *Hallar, si existen, el supremo e ínfimo de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:*

   (a) $\{x : 0 \leq x < 1\}$, (b) $\{x : 0 < x \leq 1\}$, (c) $\{x : 0 < x < 1\}$,
   (d) $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$ (e) $\{x : x^2 - 4 > 0\}$, (f) $\{x : x^2 - 4 < 0\}$,
   (g) $\{x : x < 2\}$, (h) $\{x : x \leq 2\}$, (i) $\{x : x^2 = 4\}$.

   Este ejercicio muestra que el supremo y el ínfimo de un conjunto pueden o no pertenecer a él.
5. *Para cada uno de los siguientes conjuntos liste tres cotas superiores, tres cotas inferiores, el supremo y el ínfimo (si existen) y determine si estos últimos pertenecen al conjunto.*

   (a) $\{\pi, e\}$, (b) $\{25\}$, (c) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$,
   (d) $[-2,-1] \cup [1,2]$, (e) $\{r \in \mathbb{Q} : r < 3\}$, (f) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 9\}$,
   (g) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 < 9\}$, (h) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 < 9\}$, (i) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}(-1/n, 1+1/n)$,
   (j) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(-1+1/n, 1-1/n]$, (k) $\{e + \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, (l) $\{x^2 : n \in \mathbb{R}\}$.
6. *Si $x \in \mathbb{R}$ y $|x| \leq n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$ entonces $x = 0$.*

7. *Si $x \in \mathbb{R}$ hay un único entero n tal que $n \leq x < n+1$. (El entero n se denota usualmente $[x]$ y se llama la parte entera de x).*
8. *Si $r \neq 0$ es racional y x es irracional, entonces $x+r$ y xr son irracionales.*
9. *Si r y s son racionales con $r < s$, entonces hay un irracional x tal que $r < x < s$.*
10. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente. Mostrar que $A \cup B$ y $\{a+b : a \in A,\ b \in B\}$ están acotados superiormente y determine sus supremos en términos de $\sup A$ y $\sup B$.*
11. *Sean A y B conjuntos acotados y no vacíos de números reales positivos. Determine $\sup\{ab : a \in A,\ b \in B\}$.*
12. *Usando los resultados del ejercicio 1.4.4 demuestre por inducción el Teorema Binomial: Si $a,\ b$ son números reales y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.*

1.7. Números Complejos.

En esta sección introducimos las operaciones de adición y multiplicación en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de modo de obtener un cuerpo, el cual llamaremos el Cuerpo de los Números Complejos.

Definición 1.7 Un *número complejo* es un par ordenado (a,b) donde a y b son números reales. El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$. Si $z = (a,b)$ y $w = (c,d)$ en $\mathbb{C}$, decimos que $z = w$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Definimos además

$$\begin{aligned} 0 &= (0,0) \\ 1 &= (1,0) \\ z + w &= (a+c, b+d) \\ zw &= (ac - bd, ad + bc) \\ -z &= (-a, -b) \\ \text{y si } z \neq 0 \quad z^{-1} &= (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2)) \end{aligned}$$

Teorema 1.12 $\mathbb{C}$ *es un cuerpo.*

Demostración. La verificación de los axiomas (i)-(ix) es rutinaria y queda como ejercicio.

■

En consecuencia, las propiedades de los cuerpos que establecimos anteriormente valen para $\mathbb{C}$. En particular, las leyes de cancelación y las conclusiones de los Ejercicios 1.1, 1.2 y 1.3 son válidas para los números complejos.

Convenciones: Observemos que si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$, $(a,0)(b,0) = (ab,0), -(a,0) = (-a,0)$ y si $a \neq 0, (a,0)^{-1} = (a^{-1},0)$. Por lo tanto los números complejos de la forma $(a,0)$ tienen las mismas propiedades aritméticas que los números reales. Es costumbre llamar *reales* a estos números complejos y escribir $(a,0)=a$, cuando $a\in\mathbb{R}$. Definimos ahora i como el número complejo $(0,1)$. Entonces, para $b\in\mathbb{R}$ tenemos

$$bi=(b,0)(0,1)=(0,b).$$

Los números complejos de esta forma se llaman *imaginarios*. Si $a,b\in\mathbb{R}$ tenemos

$$a+bi=(a,0)+(0,b)=(a,b).$$

Por lo tanto, el número complejo (a,b) se puede escribir en la forma $a+bi$ donde $a,b\in\mathbb{R}$. Observamos además que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Definición 1.8 Si $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$, es un número complejo definimos la *parte real* de z, $\mathrm{Re}(z)$ y la *parte imaginaria* de z $\mathrm{Im}(z)$ como los números reales

$$\mathrm{Re}(z)=a, \qquad \mathrm{Im}(z)=b,$$

respectivamente. Definimos el *conjugado complejo* de z como $\overline{z}=a-bi$ y el *valor absoluto* o *módulo* de z, como el número real

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Teorema 1.13 *Para $z,w\in\mathbb{C}$ tenemos*

(1) $\mathrm{Re}(z)=(z+\overline{z})/2.$	(2) $\mathrm{Im}(z)=(z-\overline{z})/2i.$
(3) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}.$	(4) $\overline{zw}=\overline{z}\;\overline{w}$
(5) $\overline{(1/z)}=1/\overline{z}$ *si* $z\neq 0.$	(6) $z\overline{z}=\lvert z\rvert^2$
(7) $z=\overline{z}$ *si y sólo si* $z\in\mathbb{R}$	(8) $\lvert zw\rvert=\lvert z\rvert\lvert w\rvert.$
(9) $\lvert\mathrm{Re}(z)\rvert\leq\lvert z\rvert,$	(10) $\lvert\mathrm{Im}(z)\rvert\leq\lvert z\rvert.$

Demostración. Ejercicio.

Ejercicios 1.6

1. *Demostrar el Teorema 1.13*
2. *Sea $z=(a,b)$ y pongamos $z^{-1}=(x,y)$. Escriba las ecuaciones que x e y deben satisfacer para que $z\cdot z^{-1}=(1,0)$. Resolviendo estas ecuaciones muestre que la definición que dimos de z^{-1} es adecuada.*
3. *Demuestre que la relación $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ es equivalente a la definición de z^{-1}.*
4. *Muestre que $|\bar{z}|=|z|$ y $|z^{-1}|=|z|^{-1}$.*

1.8. Conjuntos Finitos e Infinitos

Definición 1.9 Dos conjuntos A y B son *equipotentes* o *similares*, y escribimos $A \sim B$, si existe alguna función biyectiva de A en B.

Teorema 1.14 *Para cualesquiera conjuntos A, B y C se tiene*

i) $A \sim A$.

ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

iii) $A \sim B$ *y* $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Por lo tanto $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración

i) Definimos $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

ii) Si $A \sim B$ existe una función biyectiva $f\colon A \to B$. Entonces $f^{-1}\colon B \to A$ también es biyectiva y $B \sim A$.

iii) Supongamos $A \sim B$ y $B \sim C$. Entonces existen funciones biyectivas $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$. La función compuesta $g \circ f$ es biyectiva de A en C y $A \sim C$.

■

Definición 1.10 Un conjunto A es *finito* si $A = \varnothing$ o si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$. En este último caso, si $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to A$ es biyectiva y si $f(k) = x_k$, escribimos

$$A = \{x_k : 1 \leq k \leq n\} = \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_j\}_{j=1}^n.$$

Todos los conjuntos que no son finitos, son infinitos. Un conjunto es numerablemente (o contablemente) infinito si es similar a $\mathbb{N}$. En este caso, si $f\colon \mathbb{N} \to A$ es biyectiva y $f(n) = x_n$ escribimos

$$A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_j\}_{j \geq 1}.$$

Un conjunto es *numerable* si es finito o numerablemente infinito. Un conjunto que no es numerable es no numerable.

Ejemplos 1.2
1. El conjunto D de los números racionales en $(0, 1)$ es numerable.

La idea de esta demostración se debe a G. Cantor. Para demostrar la numerabilidad de D escribamos sus elementos como sigue:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{2}{11} & \cdots \\ \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} & \frac{3}{10} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

Los numeradores en las filas sucesivas del arreglo son los números naturales $1, 2, 3, \cdots$. En cada fila, los denominadores van aumentando, pero de manera que cada fracción sea propia y se encuentre en su menor expresión, es decir, que numerador y denominador sean primos relativos. Es fácil ver que cada elemento de D aparece una vez en este arreglo y que, recíprocamente, cada término del arreglo es un elemento de D. Podemos ahora enumerar el arreglo en la dirección que se muestra en la figura, lo cual prueba que este conjunto es numerable.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \to & 2 & & 6 & \to & 7 & & 15 & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\ 3 & & 5 & & 8 & & 14 & & 17 & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\ 4 & & 9 & & 13 & & 18 & & 26 & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\ 10 & & 12 & & 19 & & 25 & & 32 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

2. El intervalo $(0, 1)$ no es numerable.

   Sea E el conjunto de los números que se pueden escribir como desarrollos decimales infinitos de la forma $0, x_1x_2x_3\dots$, donde $x_1, x_2, \dots$ representan los dígitos del 0 al 9. Excluimos del conjunto los casos en los cuales todos los dígitos x_i a partir de cierto índice valen 0. Estos números tienen un desarrollo alternativo en el cual, a partir de cierto índice, todos los dígitos son 9, y usamos siempre este desarrollo. Veamos que este conjunto es numerable.

   El argumento de esta demostración se conoce como el argumento diagonal de Cantor. Supongamos que E es numerable, entonces podemos escribir una lista que contiene todos los números del conjunto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} \text{1er. elemento} & 0, x_{11}x_{21}x_{31}\cdots \\ \text{2do. elemento} & 0, x_{12}x_{22}x_{32}\cdots \\ \text{3er. elemento} & 0, x_{13}x_{23}x_{33}\cdots \\ \vdots & \quad\vdots \end{array}$$

Consideremos ahora el número decimal $0, c_1c_2c_3\cdots$ donde los dígitos c_i están escogidos entre 0 y 9 de manera que $c_1 \neq x_{11}$, $c_2 \neq x_{22}, c_3 \neq x_{33}$, $\cdots$, y todos los c_i distintos de 0. Este número pertenece a E pero es distinto a todos los números incluidos en la lista: no es igual al primer elemento porque $c_1 \neq x_{11}$, no es igual al segundo elemento porque $c_2 \neq x_{22}$, y así sucesivamente. Esta contradicción proviene de suponer que E es numerable.

Definición 1.11 Si $a < b$ son dos números reales, definimos el *intervalo cerrado* de extremos a y b por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

El *intervalo abierto* de extremos a y b es

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Definimos también

$$\begin{aligned}[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.\end{aligned}$$

Teorema 1.15 (Principio de los Intervalos Encajados) *Sea $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ una familia de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ tal que*

i) $I_{n+1} \subset I_n$.

ii) Dado $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$ existe n tal que la longitud de I_n es menor que ε.

Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{z\}$ para algún $z \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $I_n = [a_n, b_n]$. Por (i) tenemos $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, cada elemento de $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ es menor o igual que cualquier elemento de $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. En particular

$$a = \sup A \leq b_n \text{ y } b = \inf B \geq a_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Así $a \leq b$ y $\{a, b\} \subset I_n$ para todo n. Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. Si esta intersección contiene dos puntos distintos $z < w$ tomamos $\varepsilon = w - z$ en (ii) y obtenemos una contradicción. Por lo tanto a y b coinciden y $\bigcap I_n = \{a\} = \{b\}$. ■

Ejemplo 1.3
Si $a < b$ en $\mathbb{R}$, entonces $[a, b]$ no es numerable.
Una manera sencilla de demostrar este resultado es establecer una biyección entre $[0, 1]$ y $[a, b]$, puesto que ya vimos que $[0, 1]$ no es numerable. Optaremos por un camino más largo que generaliza a cualquier intervalo el argumento diagonal que usamos para $(0, 1)$.

Supongamos que $[a, b]$ es numerable. Como la función f definida por $f(n) = a+(b-a)/n$ es inyectiva de $\mathbb{N}$ en $[a, b]$ sabemos que $[a, b]$ es infinito. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $[a, b]$. Llegaremos a una contradicción construyendo un número $z \in [a, b]$ que no está en esta lista, es decir, $z \neq x_n$ para todo n.

Dividimos $[a, b]$ en tres intervalos cerrados de igual longitud:

$$\left[a, a + \frac{b-a}{3}\right], \quad \left[a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right], \quad \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right]$$

y escogemos uno de ellos, que llamaremos I_1, tal que $x_1 \notin I_1$. Una vez escogido I_n lo dividimos en tres intervalos cerrados de igual longitud y escogemos uno de ellos, que llamaremos I_{n+1} tal que $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

Por inducción hemos definido $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$. Esta familia satisface las hipótesis del teorema anterior ya que la longitud de I_n es $(b - a)/3^n$. Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{z\}$. Sabemos que $z \neq x_n$ ya que $z \in I_n$ y $x_n \notin I_n$ y esto es cierto para todo $n \in N$. Pero $z \in [a, b] = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, una contradicción.

Teorema 1.16 *Cualquier subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Sea E un conjunto numerable y $A \subset E$. Si E es finito, también lo es A. Supongamos que E es infinito, $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $A \subset E$ infinito. Sea n_1 el menor entero tal que $x_{n_1} \in A$. Si ya hemos escogido $n_1, n_2, \ldots, n_k$ escogemos n_{k+1} como el menor entero tal que $x_{n_{k+1}} \in A \setminus \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$. Esto define $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ y nos da una enumeración de $A = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

■

Teorema 1.17 *El conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración. Podemos usar la misma idea de Cantor para la demostración de que los racionales en $(0, 1)$ son numerables. Escribimos los pares ordenados (m, n) en un arreglo rectangular infinito de modo que el primer elemento del par indique la fila y el segundo la columna. Ahora podemos contar los pares usando el método de Cantor.

■

Teorema 1.18 *Sean A y B conjuntos no vacíos, B numerablemente infinito. A es numerable si y sólo si existe una función $f \colon B \to A$ sobreyectiva.*

Demostración. Supongamos que A es numerable y sea $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ una enumeración de B. Si A es finito, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ definimos $f(b_k) = a_k$ para $1 \leq k \leq p$ y $f(b_k) = a_1$ para $k \geq p$. Si A es numerablemente infinito tenemos $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y definimos $f(b_n) = a_n$.

Sea ahora $f \colon B \to A$ sobreyectiva. Para cada $a \in A$ escogemos $b \in B$ tal que $f(b) = a$ y definimos $g(a) = b$, es decir, $g(a) \in f^{-1}(\{a\})$ para cada $a \in A$.

Entonces $g : A \to B$. Como $a_1 \neq a_2$ en A implica $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \varnothing$ vemos que g es inyectiva. Por lo tanto, $A \sim g(A) \subset B$ y por el Teorema 1.16 tenemos que A es numerable.

■

Teorema 1.19 *La unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable: si I es un conjunto numerable y A_i es numerable para cada $i \in I$ entonces el conjunto $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es numerable.*

Demostración. Podemos suponer que $I \neq \varnothing, A_i \neq \varnothing$ para todo i. De acuerdo al Teorema 1.18 existen funciones sobreyectivas

$$g : \mathbb{N} \to I, \qquad f_i : \mathbb{N} \to A_i$$

para cada $i \in I$. Definimos h sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$h(m, n) = f_{g(n)}(m).$$

Es fácil verificar que h es sobreyectiva: dado $a \in A$, escogemos $i \in I$ de modo que $a \in A_i$ y entonces escogemos m y n en $\mathbb{N}$ tales que $g(n) = i, f_i(m) = a$.

Finalmente aplicamos el Teorema 1.18 para obtener el resultado.

■

Vimos como ejemplo que el conjunto de los números racionales en $(0, 1)$ es numerable. Usando el teorema que acabamos de demostrar es fácil ver ahora que todo $\mathbb{Q}$ es numerable.

Corolario 1.1 *El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es numerable.*

Demostración. Esto es consecuencia del resultado anterior ya que $\mathbb{Z}$ es numerable y

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

■

Corolario 1.2 *El conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales no es numerable.*

Ejercicios 1.7

1. *Si a y b son reales y $a < b$, entonces $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ es numerablemente infinito y $(a, b) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ no es numerable.*
2. *Demuestre el resultado del ejemplo 1.3 estableciendo una biyección entre $[0, 1]$ y $[a, b]$.*
3. *La unión de una familia finita de conjuntos finitos es finita.*
4. *Si $a,\ b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces el conjunto $(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ es similar a $\mathbb{R}$.*

5. *El conjunto* $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *es similar a* $\mathbb{N}$.
6. *Si* A *es numerablemente infinito, entonces* A *es similar a un subconjunto propio de si mismo.*
7. *Todo conjunto infinito contiene un conjunto infinito numerable.*
8. *Un conjunto* A *es infinito si y sólo si es similar a un subconjunto propio de si mismo.*
9. *Definimos* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *por* $f(a, b) = 2^{a-1}(2b-1)$. *Demuestre que esta función es una biyección. Esta es otra demostración del teorema 1.17*

1.9. La Extensión de los Números Reales

Sean ∞ y $-\infty$ dos objetos distintos fijos, que llamaremos respectivamente infinito y menos infinito, ninguno de los cuales es un elemento de $\mathbb{R}$. Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ al cual llamaremos el sistema de los números reales extendidos. Introducimos un orden en $\mathbb{R}^*$ de la siguiente manera: para $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ tiene el significado usual y $-\infty < x < \infty$. Los símbolos $>, \leq$ y $\geq$ tienen significados obvios.

Las operaciones aritméticas: $x + y, x - y$ y $x \cdot y$ tienen el significado usual para $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$x + \infty = \infty + x = x - (-\infty) = \infty$$

$$x + (-\infty) = -\infty + x = x - \infty = -\infty$$

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x > 0, & \infty \cdot x = x \cdot \infty = \ \ \infty & x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty \\ \text{Si } x < 0, & \infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty & x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty \end{array}$$

$$\infty + \infty = \infty \text{ y } (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

No definimos $\infty + (-\infty), -\infty + \infty, \infty \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot \infty$ y $(-\infty) \cdot (-\infty)$. Tampoco definimos la división por ∞ ó $-\infty$.

Definición 1.12 Para $a \leq b$ en $\mathbb{R}^*$ definimos cuatro intervalos con extremo izquierdo a y extremo derecho b de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (a \cdot b) =]a \cdot b[&= \{x \in \mathbb{R}^* : a < x < b\} \\ [a \cdot b) = [a \cdot b[&= \{x \in \mathbb{R}^* : a \leq x < b\} \\ (a \cdot b] =]a \cdot b] &= \{x \in \mathbb{R}^* : a < x \leq b\} \\ [a \cdot b] &= \{x \in \mathbb{R}^* : a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Definición 1.13 Sea $E \subset \mathbb{R}^*$. Si E no está acotado superiormente por ningún número real decimos que ∞ es el supremo de E y escribimos $\sup(E) = \infty$. Si E no está acotado inferiormente por ningún número real decimos que $-\infty$ es el ínfimo de E y escribimos $\inf(E) = -\infty$.

Observamos que $\varnothing$ está acotado tanto por arriba como por abajo por cualquier número real. Escribimos $\sup \varnothing = -\infty$ y $\inf \varnothing = \infty$. De esta manera todo subconjunto de $\mathbb{R}^*$ tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{R}^*$.

Ejercicios 1.8 (Complementarios)

1. *Para cualquier par de números reales a y b definimos la distancia entre ellos como $d(a,b) = |a - b|$. Demuestre la propiedad triangular: si c es otro número real,*
$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$
2. *¿Cuáles de los trece axiomas que hemos estudiados fallan para $\mathbb{N}$? ¿Cuáles fallan para $\mathbb{Z}$?*
3. *Considere un sistema de cinco elementos $0, 1, 2, 3, 4$ y las reglas de suma y multiplicación descritas por las siguientes tablas:*

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Muestre que este sistema satisface los axiomas de un cuerpo. ¿Es posible definir una relación de orden que satisfaga los axiomas (x) - (xii)?

4. *Un número real es* **algebraico** *si satisface una ecuación de la forma*
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
para algún $n \in \mathbb{N}$, donde los coeficientes a_i son enteros. Un número real que no es algebraico es **trascendental**. *Muestre que el conjunto de números algebraicos es numerable mientras que el de los trascendentales no lo es.*
5. **La Construcción de los Números Reales**. *Hay un procedimiento estándar, que se debe a Dedekind, para construir el conjunto de los números reales a partir de los números racionales. Suponemos la existencia de un sistema $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ que satisface los axiomas (i)-(xii). A partir de este sistema construiremos otro, $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \prec)$ que satisface los trece axiomas que consideramos en este capítulo y que 'contiene' una copia de $\mathbb{Q}$ en el siguiente sentido: Hay una biyección $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que satisface*
$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) \oplus f(y), \\ f(x \cdot y) &= f(x) \odot f(y), \\ f(x) \prec f(y) &\text{ si y sólo si } x < y. \end{aligned} \tag{1.1}$$
de modo que podemos considerar a $f(\mathbb{Q})$ como una copia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Comenzamos por definir $\mathbb{R}$ como la colección de subconjuntos α de $\mathbb{Q}$ que tienen las siguientes propiedades:

i) $\alpha \neq \varnothing$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

ii) *Si* $r \in \alpha$ *y* $s < r$ *entonces* $s \in \alpha$.

iii) *Si* $\sup \alpha$ *existe entonces* $\sup \alpha \notin \alpha$.

a) *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha \oplus \beta = \{x + y : x \in \alpha, y \in \beta\}$. *Demuestre que* $\alpha \oplus \beta \in \mathbb{R}$ *y que la operación* $\oplus$ *satisface los axiomas* $(i) - (iv)$. *El cero de* $\mathbb{R}$ *se define como* $0^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$.

b) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definimos* $0^* \prec \alpha$ *si* $0 \in \alpha$; $\alpha \prec \beta$ *si* $\alpha \ominus \beta \prec 0^*$. *Verifique que* $\prec$ *satisface los axiomas (x), (xii) y la primera parte del axioma (xi).*

c) *Definimos* $\alpha \odot 0^* = 0^*$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si* $0^* \prec \alpha$, $0^* \prec \beta$, *definimos*

$$\alpha \odot \beta = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ ó } x = st \text{ con } s > 0, t > 0, s \in \alpha, t \in \beta\}.$$

Si $\alpha \prec 0^* \prec \beta$ *definimos* $\alpha \odot \beta = \ominus((\ominus\alpha) \odot \beta)$, *y así sucesivamente. Verifique el resto de los axiomas (i) - (xii).*

d) *Suponga que el conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *está acotado superiormente. Sea* $\gamma = \cap\{\alpha : \alpha \in A\}$. *Verifique que* $\gamma \in \mathbb{R}$ *y que* $\gamma = \sup A$.

e) *Para* $x \in \mathbb{Q}$ *definimos* $f(x) = \{t \in \mathbb{Q} : t < x\}$ *Verifique que* f *es una función biyectiva de* $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$ *que satisface las condiciones (1.1).*