Capítulo 10

Series de Funciones

10.1. Series de Funciones

Definición 10.1 Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales sobre X. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $S_n \colon X \to \mathbb{R}$ por

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x).$$

Llamamos a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie infinita asociada a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y usamos la notación

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad \text{o} \quad \sum f_n.$$

Hay dos nociones de convergencia que podemos usar, si (S_n) converge puntualmente a $f \colon X \to \mathbb{R}$ decimos que la serie $\sum f_n$ converge puntualmente a f en X. Si (S_n) converge uniformemente a f, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente a f.

Los teoremas que hemos obtenido anteriormente para sucesiones de funciones pueden aplicarse a las series de funciones.

Teorema 10.1 *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones reales continuas definidas sobre $X \subset \mathbb{R}$, que converge uniformemente a f en X, entonces f es continua.*

Demostración. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a f en X. Por el Teorema 2.3 f es continua. ■

De manera similar pueden obtenerse los siguientes teoremas a partir de los resultados correspondientes de las secciones anteriores.

Teorema 10.2 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y para $n \in \mathbb{N}$ $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I. Si $\sum f_n$ converge puntualmente a f en I y si $\sum f_n'$*

converge uniformemente en I entonces f es diferenciable en I y f' es la suma uniforme de $\sum f_n'$.

Teorema 10.3 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{R}[a,b]$ tal que $\sum f_n$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\int_a^b f dx = \sum_n \int_a^b f_n dx.$$

El siguiente teorema nos provee un criterio para determinar si una serie de funciones converge absolutamente.

Teorema 10.4 (Weierstrass) *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales definidas sobre X y tales que $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum M_n$ converge entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en X.*

Demostración. Como $\sum M_n$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n > m > N$

$$\left|\sum_{i=m}^{n} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=m}^{n} |f_i(x)| \leq \sum_{i=m}^{n} M_i < \varepsilon \quad \text{para todo } \ x \in X.$$

Una aplicación del Teorema 2.1 completa la demostración. ■

Ejemplo 10.1 (Riemann)
Una función integrable que es discontinua en todo intervalo.
Definimos la función

$$B(x) = \begin{cases} x - \langle x \rangle & \text{si } x \neq k/2, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x = k/2, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donde $\langle x \rangle$ denota el entero más cercano a x. La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(nx)}{n^2} \tag{10.1}$$

definida en [0,1] es discontinua en $1/2, 1/4, 3/4, 1/6, 5/6, \ldots$ Sin embargo, la serie (10.1) converge uniformemente por el criterio de Weierstrass, y las funciones

$$f_n(x) = \frac{B(nx)}{n^2}$$

son integrables según Riemann porque tienen un número finito de discontinuidades. ◀

Ejemplo 10.2
Una función continua que no es diferenciable en ningún punto.
La función del ejemplo anterior, una vez integrada, es un ejemplo de una función continua que no es diferenciable en un conjunto denso de puntos. El

siguiente paso es preguntarse si existen funciones continuas que no sean diferenciables en ningún punto. Weierstrass demostró en 1872 que estas funciones existen. La función que consideró fue

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x)$$

que es uniformemente convergente para $b < 1$ y no tiene derivada en ningún punto si $ab > 1 + 3\pi/2$. Nosotros vamos a considerar un ejemplo propuesto por Takagi en 1903. Consideramos la función

$$K(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y la extendemos periódicamente: $K(x+1) = K(x)$ para todo x y obtenemos una función continua con forma de zig zag. Definimos ahora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} K(2^n x) = K(x) + \frac{1}{2} K(2x) + \frac{1}{4} K(4x) + \cdots \tag{10.2}$$

Como $|K(x)| \leq 1/2$ y $\sum 2^{-n}$ converge, vemos que la serie en (10.1) es uniformemente convergente y por lo tanto la función f es continua.

Para ver que esta función no es diferenciable sea x_0 un punto y consideremos $\alpha_n = i/2^n$ y $\beta_n = (i+1)/2^n$, donde i es el entero tal que $\alpha_n \leq x_0 < \beta_n$, y consideramos el cociente

$$r_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

En los puntos α_n y β_n la suma (10.2) es finita y por lo tanto r_n es la pendiente de la serie truncada

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} K(2^j x)$$

A medida que n aumenta se tiene que $r_{n+1} = r_n \pm 1$, y la sucesión (r_n) no puede converger. Por otro lado

$$r_n = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_0) - f(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n}$$

donde $\lambda_n = (\beta_n - x_0)/(\beta_n - \alpha_n) \in (0, 1]$. Si f fuese diferenciable en x_0 se tendría que

$$\begin{aligned} |r_n - f'(x_0)| &\leq \Big|\lambda_n \Big(\frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0)\Big)\Big| \\ &\quad + \Big|(1 - \lambda_n)\Big(\frac{f(x_0) - f(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n} - f'(x_0)\Big)\Big| \\ &< \lambda_n \varepsilon + (1 - \lambda_n)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande, lo cual es una contradicción. ◀

Ejercicios 10.1

1. *Demuestre que* $\Sigma 1/(n^2+x^2)$ *converge uniformemente en el conjunto* $\{x\colon x \geq 0\}$.
2. *Investigue la convergencia puntual y uniforme en* $\mathbb{R}$ *de la serie*
$$\sum \frac{1}{(1+x^2)^n}$$
3. *Demuestre que la serie*
$$\sum \frac{nx^2}{n^2+x^3}$$
es uniformemente convergente en $[0, a]$, *para cualquier* $a > 0$.
4. *Demuestre que la serie* $\sum_0^\infty x^n$ *converge uniformemente en* $[-\eta, \eta]$ *para* $0 < \eta < 1$ *pero que esto no es cierto en* $(-1, 1)$.
5. *Muestre que si* (f_n) *es una sucesión de funciones reales definidas en* $S \subset \mathbb{R}$, *entonces* Σf_n *converge uniformemente en* X *si y sólo si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un entero* n_0 *tal que*
$$\left| \sum_{r=n}^{m} f_r(x) \right| < \varepsilon$$
si $m \geq n \geq n_0$ *y* $x \in X$.
6. *Investigue la convergencia puntual y uniforme de la serie* Σf_n *en el conjunto* X *y sus subconjuntos en cada uno de los siguientes casos:*
$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n+1}, \quad X = [0, \infty); \qquad f_n(x) = \frac{1}{(nx)^2}, \quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$f_n(x) = \frac{1}{x^n+1}, \quad X = [0, \infty); \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad X = [0, \infty)$$
7. *Si* (f_n) *es una sucesión acotada de funciones reales sobre un conjunto* X *y* Σa_n *es absolutamente convergente, entonces* $\Sigma a_n f_n$ *es uniformemente convergente en* X.

10.2. Series de Potencias

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = (x-c)^n$ para $c \in \mathbb{R}$ fijo. La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$
es una *serie de potencias* y a_n se llama el n-ésimo coeficiente de la serie. Escribiremos $\Sigma a_n (x-c)^n$ para denotar esta serie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de coeficientes asociados a ella. En general sólo vamos a considerar el caso $c = 0$ pero los resultados se extienden al caso general de manera trivial.

Teorema 10.5 *Si para* $x_0 \neq 0, \Sigma a_n x_0^n$ *converge y* $|y| < |x_0|$ *entonces* $\Sigma a_n y^n$ *es absolutamente convergente .*

Demostración. Si $\Sigma a_n x_0^n$ converge, la sucesión $(a_n x_0^n)$ converge a 0 y es acotada, es decir, existe M que depende de x_0 tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, para $n \in \mathbb{N}$.

Si $|y| < |x_0|$ entonces $|a_n y^n| \leq M|y/x_0|^n$ y por el criterio de Weierstrass (teorema 10.4) la serie $\Sigma a_n y^n$ converge absolutamente ya que $|y/x_0| < 1$. ■

Teorema 10.6 *Para cualquier serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ ocurre alguna de las siguientes posibilidades:*

1. *$\Sigma a_n x^n$ converge puntualmente para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Existe $\rho > 0$ tal que la serie converge puntualmente en $(-\rho, \rho)$ y diverge puntualmente en $\{x : |x| > \rho\}$.*
3. *$\Sigma a_n x^n$ converge únicamente para $x = 0$.*

Demostración. Si no ocurren ni 1 ni 3 entonces existen reales x_0 y x_1 distintos de 0 tales que $\Sigma a_n x_0^n$ converge y $\Sigma a_n x_1^n$ diverge. Sea

$$A = \{x : \Sigma a_n x^n \text{ converge}\}.$$

A no es vacío porque $x_0 \in A$ y es acotado ya que, por el teorema 10.5, si $|x| > x_1$ entonces $\Sigma a_n x^n$ diverge, de modo que $A \subset (-x_1, x_1)$. Sea $\rho = \sup\ A$, supongamos que $|y| < \rho$ y escojamos $x \in A,\quad |y| < x \in A$. Por el teorema 10.5, como $\Sigma a_n x^n$ converge, también lo hace $\Sigma a_n y^n$ e $y \in A$, de modo que $(-\rho, \rho) \subset A$.

Para ver el recíproco supongamos que $|y| > x > \rho$ y $\Sigma a_n y^n$ converge, entonces por el teorema 10.5, $\Sigma a_n x^n$ converge y $x \in A$, lo cual contradice la definición de ρ. Por lo tanto $\Sigma a_n y^n$ diverge si $|y| > \rho$. ■

Definición 10.2 El *radio de convergencia* de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ es infinito en el caso 1, ρ en el caso 2 y 0 en el caso 3. El *intervalo* o *círculo de convergencia* es $\mathbb{R}$ en el caso 1 y $(-\rho, \rho)$ en el caso 2.

10.2.1. Determinación del Radio de Convergencia

Los siguientes teoremas dan resultados útiles para la determinación del radio de convergencia de una serie de potencias.

Teorema 10.7 (Cauchy) *Si $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ existe o es ∞, entonces*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Demostración. Aplicamos el criterio del cociente a la serie con término general $x_n = a_n x^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| / \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Ahora, la serie $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < \lim |a_n/a_{n+1}|$ y diverge si $|x| > \lim |a_n/a_{n+1}|$. ■

Teorema 10.8 (Hadamard) *El radio de convergencia de la serie* $\sum a_n x^n$ *está dado por*

$$\rho = \frac{1}{\text{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Demostración. Aplicamos el criterio de la raíz a la serie con término general $x_n = a_n x^n$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

vemos que la serie $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < \text{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ y diverge si $|x| > \text{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ■

Teorema 10.9 *Sea* $\Sigma a_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia distinto de* 0. *Entonces*

1. *La serie converge absolutamente en cada punto de su círculo de convergencia*
2. *La serie converge uniformemente en todo intervalo cerrado contenido en su círculo de convergencia.*

Demostración.

1. Supongamos que y está en el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$ y escojamos z en el círculo de convergencia de modo que $|y| < z$. Por el Teorema 10.5, $\Sigma|a_n y^n|$ converge lo cual muestra el primer resultado.
2. Supongamos que $[\alpha, \beta]$ es un intervalo cerrado contenido en el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$: Sea $\gamma = \text{máx}(|\alpha|, |\beta|)$ entonces γ está en el círculo de convergencia de $\sum a_n x^n$ y por la parte 1, $\Sigma|a_n \gamma^n|$ converge. Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{r=m+1}^{n} |a_r \gamma^r| < \varepsilon \text{ si } n > m \geq N.$$

En consecuencia, si $x \in [\alpha, \beta]$ y $S_n(x) = \Sigma_{r=0}^{n} a_r x^r$,

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{r=m+1}^{n} |a^r x^r| \leq \sum_{r=m+1}^{n} |a^r \gamma^r| < \varepsilon$$

si $n > m > N$. Por lo tanto (S_n) es una sucesión de Cauchy y en consecuencia converge. ■

Ejemplos 10.3

1. Tomemos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in \mathbb{R}$. La serie de potencias en x con coeficientes (a_n) es la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, que como sabemos es convergente si $|x| < 1$ y es divergente si $|x| \geq 1$. Así, el radio de convergencia de esta serie es 1 y observamos que ella no converge ni en 1 ni en -1.

2. Consideramos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos la serie $\Sigma x^n/n!$. Aplicando el teorema 10.7 obtenemos

$$\frac{|x|^n(n+1)!}{|x|^{n+1}n!} = \frac{n+1}{|x|} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

y por lo tanto esta serie de potencias tiene radio de convergencia ∞.

3. Consideremos ahora la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Para ver que la serie $\Sigma a_n x^n$ no converge mostraremos que $|a_n x^n|$ no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Sea $t = 1/|x|$ y n_0 el menor entero positivo mayor que t. Para todo entero $n > n_0$ tenemos

$$|a_n x^n| = \frac{n!}{t^n} = \frac{n_0!}{t^{n_0}} \frac{(n_0+1)(n_0+2)\cdots n}{t^{n-n_0}} \geq \frac{n_0!}{t^{n_0}}.$$

Por lo tanto la sucesión $(a_n x^n)$ no tiende a 0 y $\Sigma a_n x^n$ no converge. El radio de convergencia de esta serie es 0.

◀

Definición 10.3 una función f con dominio un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y valores en $\mathbb{R}$ es *analítica* si para cada $c \in I$ existe ρ tal que para todo $x \in (c-\rho, c+\rho) \subset I$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n,$$

es decir, que f se puede representar como una serie de potencias.

En las siguientes secciones estudiaremos las principales propiedades de estas funciones.

10.2.2. Continuidad

Corolario 10.1 *Si $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia distinto de cero, entonces converge puntualmente en su círculo de convergencia a una función que es continua en el círculo de convergencia.*

Demostración. Sea C el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$ y f la función a la cual converge la serie de potencias. Si $x \in C$ podemos escoger un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ tal que $x \in [\alpha, \beta] \subset C$, y como $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[\alpha, \beta]$, obtenemos que la función f es continua en x. ■

El estudio de la continuidad de una serie de potencias en un punto del borde de su círculo de convergencia es más delicado. Presentamos a continuación un resultado conocido como el Teorema de Abel.

Teorema 10.10 (Abel) *Supongamos que la serie $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia ρ positivo y supongamos que converge en uno de los extremos ρ del intervalo de convergencia: $\Sigma a_n \rho^n = s$. Entonces la función $f(x) = \Sigma a_n x^n$ para $|x| < \rho$ tiende a s cuando $x \to \rho$.*

Para la demostración necesitamos el siguiente lema

Lema 10.1 *Sea $\sum \alpha_k$ una serie (no necesariamente convergente) cuyas sumas parciales $S_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$ están acotadas, es decir, existe $M > 0$ tal que $|S_p| < M$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Sea b_j una sucesión no creciente de números no negativos. Entonces para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| \leq M b_1$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| &= |S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \cdots + (S_p - S_{p-1}) b_p| \\
&= |S_1(b_1 - b_2) + \cdots + S_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + S_p b_p| \\
&\leq M(b_2 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + b_{p-1} - b_p + b_p| = M b_1
\end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema de Abel. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se tiene que

$$|a_{n+1}\rho^{n+1} + \cdots + a_{n+p}\rho^{n+p}| < \varepsilon$$

para todo $p \in \mathbb{N}$. Dado $n > N$ escribimos $\alpha_p = a_{n+p}\rho^{n+p}$ para $p \in \mathbb{N}$. Estas α_p cumplen las hipótesis del lema anterior con $M = \varepsilon$. Para todo $x \in [0, \rho]$ tenemos

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| = |\alpha_1(\frac{x}{\rho}) + \cdots + \alpha_p(\frac{x}{\rho})^p|(\frac{x}{\rho})^n$$

Usando el lema con $b_p = (x/\rho)^p$ concluimos que para todo $n > N$ y todo $x \in [0, \rho]$

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| \leq \varepsilon\big(\frac{x}{\rho}\big)^{n+1} \leq \varepsilon$$

para todo $p \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, \rho]$. Como los términos $a_n x^n$ son funciones continuas, la suma $f(x) = \sum a_n x^n$ es continua en $[0, \rho]$. Por lo tanto

$$\sum_n a_n \rho^n = \lim_{x \to \rho^-} \sum a_n x^n$$

■

10.2.3. Derivadas e Integrales

El siguiente resultado nos muestra la relación entre diferenciación y series de potencias.

Teorema 10.11 *Si $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia distinto de cero y converge puntualmente en su círculo de convergencia a la función f, entonces f es diferenciable en cada punto x de su círculo de convergencia y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Demostración. Sea C el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$, $\ x \in C$ y escojamos $y \in C$ de modo que $y > |x|$. Entonces $\Sigma |a_n y^n|$ es convergente y para algún $k \in \mathbb{R}, |a_n y^n| \leq k$ para $n \in \mathbb{N}$ y se tiene

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = (n+1)\left|\frac{x}{y}\right|^n |a_{n+1}y^n| \leq \frac{k}{y}(n+1)\left|\frac{x}{y}\right|^n.$$

En consecuencia, como $\Sigma(n+1)|x/y|^n$ converge, lo cual se ve fácilmente usando el criterio de la razón, podemos concluir por el criterio de comparación que $\Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$ converge. Por lo tanto el círculo de convergencia C de $\Sigma a_n x^n$ está contenido en el círculo de convergencia C_1 de $\Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$, de manera que si $x \in C$, existe $\delta > 0$ tal que $[x-\delta, x+\delta] \subset C \subset C_1$. Por el Teorema 10.9, tanto $\Sigma a_n x^n$ como $\Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$ convergen uniformemente en $[x-\delta, x+\delta]$ y por el Teorema 10.2, para $t \in (x-\delta, x+\delta)$

$$f'(t) = \sum (n+1)a_{n+1}t^n.$$

■

Teorema 10.12 *Bajo las hipótesis del Teorema 10.11 f tiene derivadas de todos las ordenes en su círculo de convergencia C que están dadas por*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \tag{10.3}$$

y en particular

$$f^{(k)}(0) = k!a_k \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10.4}$$

Demostración La ecuación (10.3) se obtiene aplicando sucesivamente el teorema anterior a f. ■

La ecuación (10.4) nos muestra que los coeficientes en el desarrollo de f en serie de potencias están determinados por los valores de f y sus derivadas en el origen. Por otra parte, si conocemos los coeficientes en el desarrollo de la función tenemos de inmediato los valores de las derivadas de f en el origen.

Observamos sin embargo que aún cuando una función f puede tener derivadas de todos las ordenes, la serie $\Sigma a_n x^n$ donde a_n se obtiene usando (10.4) no necesariamente converge a $f(x)$ para $x \neq 0$. En este caso f no puede ser desarrollada en serie de potencias ya que tendríamos $f(x) = \Sigma c_n x^n$, en consecuencia

$$n!c_n = f^{(n)}(0)$$

y necesariamente $c_n = a_n$.

Ejemplo 10.4

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es posible mostrar que f tiene derivada de todos los ordenes en $x = 0$ y $f^{(k)}(0) = 0$ para $n \geq 1$.

◀

Teorema 10.13 *Si $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia distinto de cero y converge puntualmente en su círculo de convergencia a la función f, entonces f es integrable según Riemann en cualquier subintervalo cerrado $[a, b]$ del círculo de convergencia y*

$$\int_a^b f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n-1}).$$

Demostración. Sea $[a, b]$ un subintervalo del círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$. Por el Teorema 10.9 $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[a, b]$ y por el Teorema 10.3 $f \in R[a, b]$ y

$$\int_a^b f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$$

de donde se obtiene el resultado. ■

10.2.4. Multiplicación de Series de Potencia

Teorema 10.14 *Sea $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ dos series de potencia con intervalos de convergencia I_1, I_2, respectivamente. Sea f la función definida por la primera serie en I_1, g la función definida por la segunda serie en I_2. Entonces, en el dominio común $I_1 \cap I_2$ de ambas funciones, se tiene que*

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \textit{con } c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Demostración. Sean

$$A_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \qquad C_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

las sumas parciales y sea $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i x^i$. Tenemos

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} x^i = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_j b_{i-j} x^i \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \sum_{i=j}^{n} b_{i-j} x^{i-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \sum_{k=0}^{n-j} b_k x^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j B_{n-j}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j (g(x) - R_{n-j}(x)) \\
&= g(x) \sum_{j=0}^{n} a_j x^j - \sum_{j=0}^{n} a_j R_{n-j}(x) x^j.
\end{aligned}$$

Ahora, $g(x)\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ converge a $g(x)f(x)$ cuando $n \to \infty$ y para mostrar que $C_n \to f \cdot g$ basta ver que

$$|a_0 R_n + a_1 R_{n-1} x + \cdots + a_n R_0 x^n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Fijamos x y sabemos que $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente. Ponemos $A = \sum |a_j||x|^j$. Además, $\sum b_j x^j$ es convergente y dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|R_n| < \varepsilon$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=0}^{n} a_j x^j R_{n-j}\Big| &= \Big|\Big(\sum_{j=0}^{n-N} + \sum_{j=n-N+1}^{n}\Big) a_j x^j R_{n-j}\Big| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-N} |a_j||x|^j |R_{n-j}| + \sum_{j=n-N+1}^{n} |a_j||x|^j |R_{n-j}| \\
&\leq \sup_{k \geq N} |R_k| \sum_{j=0}^{\infty} |a_j||x|^j |R_{n-j}| + \sup_{k \leq N} |R_k| \sum_{j=n-N+1}^{n} |a_j||x|^j \\
&\leq \varepsilon A + M \sum_{j=n-N+1}^{n} |a_j||x|^j
\end{aligned}$$

donde M es una cota para $|R_n|$. Haciendo $n \to \infty$ vemos que la suma en el segundo término tiende a 0, de modo que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{j=0}^{n} a_j x^j R_{n-j}\Big| \leq \varepsilon A$$

Como ε es arbitrario, esto implica el resultado. ■

10.2.5. Series de Taylor

Sea f una función real definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al 0, y supongamos que f tiene derivadas de todos los ordenes en 0. Podemos entonces escribir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

donde $f^{(0)}(0) = f(0)$. Esta serie se conoce como la serie de Maclaurin de f.

Consideremos ahora la serie de potencias $\Sigma a_n x^n$. Si esta serie tiene radio de convergencia distinto de 0 y converge a f en su círculo de convergencia, entonces, por el Corolario 10.1, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, de modo que $\Sigma a_n x^n$ es la serie de Maclaurin correspondiente a f.

En general, las series de potencias de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ se conocen como la serie de Taylor de f alrededor del punto x_0.

Por el Teorema de Taylor sabemos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \quad \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x.$$

Esta serie converge a f si y sólo si el resto tiende a 0 cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!} = 0.$$

Teorema 10.15 *Supongamos que f tiene derivadas de todos los ordenes en un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ y que existe una constante M (que puede depender de x_0) tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

y $n \geq N$ (algún $N \in \mathbb{N}$). Entonces, para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ la serie de Taylor de f alrededor de x_0 converge a $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Demostración. En cada uno de estos puntos tenemos un desarrollo de Taylor cuyo resto puede estimarse:

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!}\right| \leq M\frac{|x - x_0|^n}{n!} = M\frac{r^n}{n!}$$

pero $\frac{r^n}{n!} \to 0$ y el límite del resto tiende a 0. ∎

Ejemplo 10.5 (Las funciones exponencial y logarítmica)
Definimos

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{10.5}$$

Por la prueba del cociente sabemos que esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema sobre multiplicación de series absolutamente convergentes obtenemos

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= E(x+y) \end{aligned} \tag{10.6}$$

Como consecuencia tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$E(x)E(-x) = E(x-x) = E(0) = 1 \tag{10.7}$$

y por lo tanto $E(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- A partir de la definición observamos que $E(x) > 0$ si $x > 0$ y por lo tanto $E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- A partir de (10.5) vemos que $E(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$ y (10.7) nos dice que $E(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.
- A partir de (10.5) vemos que $0 < x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$ y por (10.7) tenemos $E(-y) < E(-x)$, de modo que E es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Además por (10.7):

$$\lim_{n\to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h\to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z)$$

de modo que $E'(z) = E(z)$.

Iterando (10.6) obtenemos

$$E(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = E(z_1) \cdots E(z_n).$$

Como $E(1) = e$ obtenemos

$$E(n) = e^n.$$

Si $\rho = n/m, \;\; n, m \in \mathbb{N}$ entonces

$$[E(\rho)]^m = E(m\rho) = E(n) = e^n$$

es decir,

$$E(\rho) = e^{\rho}, \quad \rho > 0,\ \rho \in \mathbb{Q}$$

y por (10.7) sabemos que

$$E(-\rho) = e^{-\rho} \text{ si } \rho > 0,\ \rho \in \mathbb{Q}.$$

Si definimos

$$e^x = \sup\{e^{\rho} : \rho < x, \rho \in \mathbb{Q}\}$$

las propiedades de continuidad y monotomía de E implican

$$E(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resumiendo tenemos

Teorema 10.16 *a)* e^x *es continua y diferenciable para todo* x.

b) e^x *es estrictamente creciente y estrictamente positiva.*

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $e^x \to +\infty\ (x \to +\infty), \quad e^x \to 0,\ (x \to -\infty).$

e) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Demostración. Sólo demostraremos e). A partir de $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ para $x > 0$, obtenemos

$$x^{-n}e^x > \frac{(n+1)!}{x} \to \infty.$$

∎

Como E es estrictamente creciente y diferenciable en $\mathbb{R}$, tiene una función inversa L que también es estrictamente creciente y diferenciable y cuyo dominio es $(0,\infty)$. L está definida por

$$L(E(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.8}$$

Derivando obtenemos

$$L'(E(x))E(x) = 1$$

Poniendo $y = E(x)$,

$$L'(y) = 1/y, \quad y > 0.$$

Tomando $x = 0$ en (10.8) vemos que $L(1) = 0$ y en consecuencia

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}.$$

Si $u = E(x), v = E(y)$

$$L(uv) = L(E(x)E(y)) = L(E(x+y)) = x + y = L(u) + L(v).$$

Usualmente escribimos $\log x$ en lugar de $L(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \log x &\to \infty \qquad x \to \infty, \\ \log x &\to -\infty \qquad x \to 0. \end{aligned}$$

Es posible mostrar como antes que

$$x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \log x}$$

derivando

$$(x^\alpha)' = E(\alpha L(x))\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Veamos que $x^{-\alpha}\log x \to 0$ $(x \to \infty)$, $\alpha > 0$. Si $0 < \varepsilon < \alpha$ y $x > 1$

$$\begin{aligned} x^{-\alpha}\log x &= x^{-\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt < x^{-\alpha}\int_1^x t^{\varepsilon-1}dt \\ &= x^{-\alpha}\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}\bigg|_1^x < \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon} \end{aligned}$$

y como $\alpha > \varepsilon$ esta expresión tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

Ejemplo 10.6 (Las funciones trigonométricas)
Definimos las funciones $C(x)$ y $S(x)$ en $\mathbb{R}$ por

$$C(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!}, \quad S(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Ambas series convergen en todo $\mathbb{R}$. Si derivamos estas series obtenemos

$$S'(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!} = C(x)$$

y de manera similar $C'(x) = -S(x)$.

Es posible ver que, definidas de esta manera, estas funciones satisfacen las mismas identidades que las funciones seno y coseno. Por ejemplo, si ponemos $h(x) = S^2(x) + C^2(x)$ derivando obtenemos

$$h'(x) = 2S(x)C(x) - 2C(x)S(x) = 0$$

para todo x y por lo tanto h es constante. Como $C(0) = 1,\ S(0) = 0$ tenemos $h(0) = 1$ y $h(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Usando el desarrollo en serie para la función exponencial, que también vale para argumentos complejos, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + i\frac{x^5}{5} - \dots \\ &= \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \cdots\Big) + i\Big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\Big) \\ &= C(x) + iS(x) \end{aligned}$$

que es la fórmula de Euler. A partir de ella podemos obtener otras propiedades de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, a partir de la identidad

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} C(x+y) + iS(x+y) &= (C(x) + iS(x))(C(y) + iS(y)) \\ &= C(x)C(y) + iS(x)C(y) + iC(x)S(y) - S(x)S(y) \\ &= C(x)C(y) - S(x)S(y) + i(S(x)C(y) + C(x)S(y)) \end{aligned}$$

e igualando la partes real e imaginaria obtenemos las identidades

$$\begin{aligned} C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y) \\ S(x+y) &= S(x)C(y) + C(x)S(y) \end{aligned}$$

Ejercicios 10.2

1. *Verificar que i) el círculo de convergencia de* $\Sigma\beta^n x^n$ *es* $(-1/\beta, 1/\beta)$*; ii)* $\Sigma x^n/n^2$ *converge si* $|x| \leq 1$ *y diverge si* $|x| > 1$.
2. *Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y determinar su comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia.*

   1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[n]{n}}$ *3)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3/2)^n x^n}{n+1}$

   4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ *5)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ *6)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{n}$

   7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$ *8)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ *9)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

   10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$ *11)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n-1)}$ *12)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$
3. *Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y determinar su comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia.*

   $$1) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1}, \qquad 2) \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!},$$
   $$3) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n-2}}{(2n-2)!}, \qquad 4) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x+3)^{2n-2}.$$
4. *Halle la serie de MacLaurin para las siguientes funciones y determine su radio de convergencia*

   $$1)\ \textit{sen}\ x, \qquad 2) \cos x, \qquad 3) (1+x)^{\alpha}, \qquad 4) \log(1+x)$$

   Observe que en tercer caso el intervalo de convergencia de la serie y el dominio de la función no coinciden.

5. *A partir de la relación* $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}$*, desarrolle el integrando en una serie de potencias e integre para obtener la serie de MacLaurin de* $\arcsin x$*. El mismo procedimiento aplicado a la relación* $\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ *permite obtener la serie para* $\log(1+x)$*.*
6. *Sea* $\sum c_n$ *una serie convergente y definamos* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *para* $-1 < x < 1$*. Demuestre que*
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$
es decir, que la serie de potencias es continua en 1.

10.3. Series de Fourier

Las ideas del Análisis de Fourier surgen históricamente asociadas a proglemas de la Física tales como la conducción del calor y el movimiento de ondas. Vamos a revisar muy superficielmente uno de estos problemas, el de la cuerda vibrante, para hacernos una idea del tipo de problemas que motivó el surgimiento de estas técnicas.

10.3.1. La Cuerda Vibrante

Consideremos la ecuación de onda

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \tag{10.9}$$

que describe el movimiento de una cuerda que está sujeta en sus extremos. supondremos, por comodidad, que los extremos están situados e los puntos 0 y π, y tenemos como condiciones de contorno

$$y(0,t) = 0, \qquad y(\pi,t) = 0. \tag{10.10}$$

La función $y(x,t)$ describe el movimiento de la cuerda en el punto x a medida que el tiempo t evoluciona.

Adicionalmente tenemos las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{10.11}$$

que indica que la velocidad inicial de la cuerda es 0 y

$$y(x,0) = f(x) \tag{10.12}$$

que describe la configuración inicial de la cuerda.

Para resolver esta ecuación suponemos que podemos separar las variables. Por conveniencia tomamos $a = 1$ y suponemos $y(x,t) = u(x)v(t)$. Colocando esto en la ecuación diferencial (10.9) obtenemos

$$u''(x)v(t) = u(x)v''(t) \tag{10.13}$$

Obtenemos
$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{v''(t)}{v(t)}$$
Como el lado izquierdo sólo depende de x mientras que el derecho sólo de t, necesariamente
$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$$
para alguna constante λ. Esto nos da dos ecuaciones ordinarias lineales de segundo orden que podemos resolver
$$u'' = \lambda u \tag{10.14}$$
$$v'' = \lambda v \tag{10.15}$$
Las condiciones iniciales implican $u(0) = u(\pi) = 0$.

Este problema tiene solución no trivial si y sólo si $\lambda = n^2$ para algún entero positivo n, y la solución correspondiente es
$$u_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$$
Para este mismo valor de λ, la solución general de (10.15) es
$$v(t) = A\operatorname{sen}(nt) + B\cos(nt)$$
La condición 10.11 implica que $v'(0) = 0$ y entonces $A = 0$. Por lo tanto
$$v(t) = B\cos(nt)$$
En consecuencia la solución que encontramos para la ecuación (10.9) con las condiciones de contorno e iniciales dadas es
$$y_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nt) \tag{10.16}$$
Por el principio de superposición cualquier combinación lineal finita de estas soluciones también es una solución.
$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \operatorname{sen}(kx)\cos(kt)$$

Bajo ciertas condiciones, una combinación lineal infinita de soluciones del tipo (10.16) también es una solución:
$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen}(kx)\cos(kt)$$

Nos falta aún examinar la condición (10.12): $y(x,0) = f(x)$. tenemos
$$f(x) = y(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen}(kx)$$
y esta condición se satisface si podemos expresar f en un desarrollo de funciones seno.

10.3.2. Sistemas Ortogonales de Funciones

Definición 10.4 Si f, g son funciones reales, integrables según Riemann en $[a, b]$, la integral

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{10.17}$$

se conoce como el producto interno de f y g, y se denota por $\langle f, g\rangle$. El número no-negativo $||f|| = \langle f, f\rangle^{1/2}$ es la norma de f.

El producto interno tiene las siguiente propiedades

- $\langle f, f\rangle \geq 0$.
- $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.
- $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$, $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$.

Observación 10.1 Para la integral de Riemann no es cierto en general que $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$, ya que una función que sea distinta de 0 en un punto del intervalo $[a, b]$ pero igual a cero en el resto de los puntos satisface $\langle f, f\rangle = 0$ pero no es identicamente igual a cero. Sin embargo, si consideramos el producto interno sobre el espacio de las funciones continuas en $[a, b]$, entonces si se satisface que $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Proposición 10.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si f, g son integrables según Riemann en $[a, b]$ entonces*

$$|\langle f, g\rangle| \leq ||f||\;||g||. \tag{10.18}$$

Demostración. Sabemos que $f \cdot g$, f^2, y g^2 son integrables. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (f(x) - \gamma g(x))^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\gamma\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \gamma^2\int_a^b g^2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Ponemos

$$A = \int_a^b f^2(x)\,dx,\ B = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,\ C = \int_a^b g^2(x)\,dx,$$

y entonces

$$A - 2\gamma B + \gamma^2 C \geq 0$$

para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Si $C = 0$ entonces $B = 0$. Si $C \neq 0$ el discriminante de la ecuación cuadrática no puede ser positivo y tenemos

$$B^2 \leq AC.$$

■

Usando esta desigualdad podemos obtener la desigualdad de Minkowski

Proposición 10.2 (Desigualdad de Minkowski)

$$||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| \tag{10.19}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
||f+g||^2 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx \\
&\leq \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|dx + \int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|dx \\
&\leq ||f||||f+g|| + ||g||||f+g|| = (||f|| + ||g||)||f+g||
\end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. ■

Tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned}
||f+g||^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + 2\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \\
&= ||f||^2 + ||g||^2 + 2\langle f,g\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación $||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$ es equivalente a $\langle f,g\rangle = 0$. Esto motiva la siguiente definición

Definición 10.5 Sean f, g funciones integrables según Riemann en $[a,b]$. Si $\langle f,g\rangle = 0$ decimos que f y g son ortogonales. Si $S = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ es una colección de funciones integrables según Riemann en $[a,b]$ decimos que S es un sistema ortogonal en $[a,b]$ si

$$\langle \phi_m, \phi_n\rangle = 0 \quad \text{siempre que } n \neq m \tag{10.20}$$

Si además cada ϕ_n tiene norma 1, decimos que S es ortonormal en $[a,b]$. Escribiremos s.o.n. para abreviar sistema ortonormal.

Nos interesa en particular el sistema trigonométrico dado por

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \quad n \geq 1 \tag{10.21}$$

Es sencillo verificar que este sistema es ortonormal en $[0, 2\pi]$, o en cualquier intervalo de longitud 2π.

La noción de producto interno puede extenderse a funciones con valores complejos que sean integrables según Riemann. La integral de una función de este tipo $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Las propiedades de estas integrales son similares a las de las funciones reales y pueden deducirse de ellas.

En el caso de funciones complejas el producto interno está definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \tag{10.22}$$

donde $\overline{g(x)}$ denota el complejo conjugado de $g(x)$. Se introduce el conjugado para que el producto interno de f consigo misma sea una cantidad no-negativa:

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\, dx \geq 0.$$

La norma de f se define como antes: $||f||^2 = \langle f, f\rangle$ y las propiedades del producto interno deben modificarse de la siguiente manera:

$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$$

y además ahora podemos multiplicar por constantes complejas.

La definición de sistemas ortogonales y ortonormales no cambia. Como ejemplo de un sistema ortonormal de funciones con valores complejos tenemos

$$\phi_n(t) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \geq 0 \tag{10.23}$$

donde $[a, b] = [0, 2\pi]$.

Ejemplo 10.7
Sea $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$, $g \neq 0$. Definimos la proyección de f sobre g como el vector

$$h = \langle f, g\rangle \frac{g}{||g||^2}.$$

Veamos que h y $f - h$ son ortogonales.

$$\begin{aligned}\langle h, f - h\rangle = \langle h, f\rangle - ||h||^2 &= \frac{\langle g, f\rangle\langle f, g\rangle}{||g||^2} - \frac{\langle\langle f, g\rangle g, \langle f, g\rangle g\rangle}{||g||^4} \\ &= \frac{\langle g, f\rangle\langle f, g\rangle}{||g||^2} - \frac{\langle f, g\rangle\overline{\langle f, g\rangle}}{||g||^2} = 0\end{aligned}$$

ya que $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$. Por lo tanto h y $f - h$ son ortogonales.

Definición 10.6 Una colección finita $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de funciones es *linealmente dependiente* en $[a, b]$ si existen constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n$, no todas cero, tales que

$$c_0\phi_0(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{10.24}$$

En caso contrario decimos que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es *linealmente independiente* en $[a, b]$. Una colección infinita $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ es *linealmente independiente* en $[a, b]$ si todo subconjunto finito es linealmente independiente en $[a, b]$.

Ejemplo 10.8
Todo sistema ortogonal es linealmente independiente: Supongamos que

$$c_0\phi_0(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

multiplicando por $\overline{\phi_k(x)}$, $0 \leq k \leq n$ e itegrando en $[a, b]$ obtenemos

$$c_k \int_a^b \phi_k^2(x)\, dx = c_k ||\phi_k||^2 = 0 \Rightarrow c_k = 0$$

para $0 \leq k \leq n$.

Dado un espacio con producto interno V y una colección de vectores linealmente independientes $g_0, g_1, g_2, \ldots$ en V, es posible formar un sistema ortonormal $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{g_0}{||g_0||} \\
\phi_1 &= \frac{g_1 - \langle g_1, \phi_0\rangle \phi_0}{||g_1 - \langle g_1, \phi_0\rangle \phi_0||} \\
\phi_2 &= \frac{g_2 - \langle g_2, \phi_1\rangle \phi_1 - \langle g_2, \phi_0\rangle \phi_0}{||g_2 - \langle g_2, \phi_1\rangle \phi_1 - \langle g_2, \phi_0\rangle \phi_0||}
\end{aligned}$$

Este procedimiento se conoce como el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Los polinomios de Legendre normalizados se obtienen aplicando el proceso de Gram-Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ en $[-1, 1]$. En $\mathbb{R}$, este proceso aplicado a las funciones $x^n e^{x^2/2}$, $n \geq 0$ da las funciones de Hermite normalizadas y aplicado a las funciones $x^n e^{-x}$, $n \geq 0$ en $[0, \infty)$ da las funciones de Laguerre normalizadas.

La analogía existente con vectores en un espacio de dimensión finita sugiere la posibilidad de expresar una función arbitraria f como combinación lineal de los elementos de un conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$, que sería una ecuación de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(t) \tag{10.25}$$

válida para todo $x \in [a, b]$.

Esta idea plantea dos problemas. ¿bajo qué condiciones en f y $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ se puede asegurar que (10.25) existe? Y suponiendo que exista un desarrollo de este tipo ¿Cómo determinamos los coeficientes $c_0, c_1, \ldots$? Veamos primero el segundo problema.

Vamos a suponer que (10.25) es cierta y operamos formalmente con esta ecuación sin preocuparnos por los problemas de convergencia. Multiplicamos ambos lados por $\overline{\phi_k(x)}$ e integramos la serie resultante término a término en $[a, b]$ para obtener

$$\langle f, \phi_k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle \phi_n, \phi_k \rangle = c_k.$$

Por lo tanto, si podemos justificar las operaciones formales, vemos que el k-ésimo coeficiente en (10.25) no es más que el producto interno $\langle f, \phi_k \rangle$.

Teorema 10.17 *Sea $\{\phi_0.\phi_1, \dots\}$ un sistema ortonormal en $[a, b]$ y supongamos que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

converge uniformemente en $[a, b]$ y sea $f(x)$ la función definida por esta serie en $[a, b]$. Entonces esta función es integrable según Riemann en $[a, b]$ y el n-ésimo coeficiente c_n está dado por

$$c_n = \langle f, \phi_n \rangle = \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)}\, dx, \quad n \geq 0. \tag{10.26}$$

Demostración. Aplicar resultados sobre series de funciones. ■

Supogamos ahora que tomamos el siguiente punto de vista: Nos dan una función f integrable según Riemann en $[a, b]$ y un conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ en $[a, b]$. Podemos definir los coeficientes c_k por (10.26) y podemos escribir la serie (10.25). Surgen ahora las siguientes preguntas: ¿Converge puntualmente en $[a, b]$ esta serie? Si la serie converge para cierto x ¿es $f(x)$ su valor? En general la respuesta a ambas preguntas es negativa. Es necesario poner restricciones adicionales tanto en la función f como en el conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$.

10.4. La Serie de Fourier de una Función.

Definición 10.7 Sea $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ un s.o.n. en $[a, b]$ y supongamos que $f \in \mathcal{R}(a, b)$. La notación

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \tag{10.27}$$

significa que los coeficientes $c_i,\ i \geq 0$ están dados por

$$c_n = \langle f, \phi_n \rangle = \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)}\, dx, \quad n \geq 0. \tag{10.28}$$

La serie (10.27) se conoce como la *serie de Fourier* de f respecto al sistema $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ y los números $c_i,\ i \geq 0$ son los *coeficientes de Fourier* de f respecto a $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$.

En el caso particular de las funciones trigonométricas, la serie se conoce como la serie de Fourier generada por f. En este caso

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx.$$

Si usamos las funciones e^{inx} entonces la serie de Fourier se escribe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

10.5. Convergencia en Media Cuadrática

Definición 10.8 Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{R}(a,b)$ y sea $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Decimos que f_n converge en media cuadrática a f si

$$||f_n - f|| = \Big(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{10.29}$$

Este tipo de convergencia es distinto a la convergencia puntual. Los siguientes ejemplos muestran que ningun implica la otra.

Ejemplo 10.9
Consideremos $f_n = n\mathbf{1}_{(0,1/n)}$. Entonces $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in [0,1]$ pero

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = 1,$$

de modo que f_n no converge a 0 en media cuadrática.

Ejemplo 10.10
Consideremos la siguiente sucesión

$$\begin{aligned}
&f_{0,0} = \mathbf{1}_{[0,1)}\\
&f_{1,0} = \mathbf{1}_{[0,1/2)},\ f_{1,1} = \mathbf{1}_{[1/2,1)}\\
&f_{2,0} = \mathbf{1}_{[0,1/3)},\ f_{2,1} = \mathbf{1}_{[1/3,2/3)},\ f_{2,2} = \mathbf{1}_{[2/3,1)}\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^1 |f_{n,k}|^2 = 1/n$$

para todo $0 \leq k \leq n$, de modo que la sucesión tiende a cero en media cuadrática, pero no converge en ningún punto.

Definición 10.9 Una sucesión (f_n) en un espacio con producto interno es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

Un espacio con producto interno es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge a un punto del espacio. Un espacio con producto interno que es completo se conoce como un *espacio de Hilbert.*

Ni el espacio de las funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ con el producto interno que hemos definido, ni el de las funciones integrables según Riemann son completos.

Teorema 10.18 *Sea $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ un s.o.n. en $[a, b]$, sea $f \in \mathcal{R}(a, b)$ y supongamos que $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$. Sea $s_n(x)$ la suma parcial*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \tag{10.30}$$

Si $b_0, b_1, b_2, \dots$ son números complejos cualesquiera sea

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \phi_k(x). \tag{10.31}$$

Entonces tenemos la siguiente identidad:

$$\int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |c_k - b_k|^2 \tag{10.32}$$

de donde se obtiene la desigualdad

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2 dx \tag{10.33}$$

Demostración. (10.32) implica (10.33) porque el lado derecho de (10.32) tiene su mínimo valor cuando $b_k = c_k$, para $k \geq 0$. Para demostrar (10.32) escribimos

$$\int_a^b |f - t_n|^2 \, dx = \langle f - t_n, f - t_n \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, t_n \rangle - \langle t_n, f \rangle + \langle t_n, t_n \rangle$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\langle t_n, t_n\rangle &= \langle \sum_{k=0}^{n} b_k\phi_k, \sum_{m=0}^{n} b_m\phi_m\rangle = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} b_k\overline{b_k}\langle\phi_k,\phi_m\rangle = \sum_{k=0}^{n}|b_k|^2\\
\langle f, t_n\rangle &= \langle f, \sum_{k=0}^{n} b_k\phi_k\rangle = \sum_{k=0}^{n}\overline{b_k}\langle f,\phi_k\rangle = \sum_{k=0}^{n}\overline{b_k}c_k\\
\langle t_n, f\rangle &= \overline{\langle f, t_n\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\overline{c_k}b_k
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f-t_n|^2 dx &= ||f||^2 + \sum_{k=0}^{n}|b_k|^2 - \sum_{k=0}^{n}\overline{b_k}c_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\overline{c_k}\\
&= ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n}(b_k-c_k)(\overline{b_k}-\overline{c_k})\\
&= ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n}|b_k-c_k|^2
\end{aligned}$$

■

Teorema 10.19 *Sea $\{\phi_0,\phi_1,\dots\}$ un s.o.n. en $[a,b]$, sea $f\in\mathcal{R}(a,b)$ y supongamos que $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)$. Entonces*

(a) La serie $\sum|c_n|^2$ converge y satisface la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2\,dx \tag{10.34}$$

que se conoce como la desigualdad de Bessel.

(b) La ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \tag{10.35}$$

que se conoce como la identidad de Parseval, es válida si y sólo si se tiene $||f-s_n||\to 0$ cuando $n\to\infty$, donde s_n es la sucesión de sumas parciales.

Demostración. Poniendo $b_k = c_k$ en (10.32) y observando que el lado izquierdo es no-negativo obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n}|c_k|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

que demuestra (a). Para demostrar (b) ponemos $b_k = c_k$ de nuevo en (10.32) y obtenemos

$$||f - s_n|| = \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\, dx = \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2$$

de donde se obtiene (b). ■

La parte (b) del teorema anterior nos dice que la identidad de Parseval vale si y sólo si la sucesión s_n converge a f en media cuadrática.

Definición 10.10 Sea S una colección de funciones integrables según Riemann en $[a,b]$. Sea $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ un s.o.n. en $[a,b]$,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

y sea

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x), \quad n \geq 0.$$

El conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ es *completo* para S si para toda $f \in S$ se tiene que $||f - s_n|| \to 0$ cuando $n \to 0$.

Por lo tanto, para un s.o.n.c. la relación de Parseval vale para toda $f \in S$. Veremos más adelante que el sistema de funciones trigonométricas es completo para el conjunto S de las funciones continuas en $[0, 2\pi]$.

Como consecuencia de la parte (a) del teorema anterior observamos que el coeficiente de Fourier c_n de f respecto de cualquier s.o.n. $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ debe tender a 0 cuando $n \to \infty$, porque $\sum |c_n|^2$ converge. En particular, cuando $\phi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = 0$$

de donde obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

10.6. Series Trigonométricas.

De ahora en adelante sólo consideraremos series trigonométricas y funciones periódicas con período 2π que sean integrables según Riemann en $[-\pi, \pi]$. La serie de Fourier de f es la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

con

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

y la suma parcial se escribe

$$s_n(x) = s_n(f; x) = \sum_{-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

En este caso la desigualdad de Bessel es

$$\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x)|^2\, dx = \sum_{n}^{n} |c_k|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{10.36}$$

Teorema 10.20 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Sea* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Para todo* $\beta \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\, dt = 0 \tag{10.37}$$

Demostración. Si f es constante en $[a, b]$, el resultado es consecuencia de

$$\Big| \int_a^b \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\, dt \Big| = \Big| \frac{\cos(\alpha a + \beta) - \cos(\alpha b + \beta)}{\alpha} \Big| \leq \frac{2}{\alpha}$$

si $\alpha > 0$. El resultado también vale si f es constante en (a, b), sin importar como definimos $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto (10.37) vale si f es una función escalera.

Para $\varepsilon > 0$ escogemos $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $S(P, f) - I(P, f) < \varepsilon/2$. Definimos $M(t)$, $m(t)$ funciones escalera determinadas por P y f de modo que $M(t)$ vale M_i en el i-ésimo intervalo de la partición P, y de manera similar para $m(t)$ con m_i. Por lo tanto $m(t) \leq f(t) \leq M(t)$ para todo $t \in [a, b]$ y tenemos

$$I(P, f) = \int_a^b m(t)\, dt, \qquad S(P, f) = \int_a^b M(t)\, dt.$$

Entonces

$$\Big| \int_a^b (f(t) - m(t)) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\, dt \Big| \leq \int_a^b |M(t) - m(t)|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para este mismo valor de ε podemos escoger A de modo que

$$\alpha \geq A \Rightarrow \Big| \int_a^b m(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\, dt \Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\Big| \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\, dt \Big| \to 0.$$

cuando $\alpha \to \infty$. ■

Introducimos el núcleo de Dirichlet para obtener una expresión para s_n que sea más manejable:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}. \tag{10.38}$$

Esta función satisface

$$(e^{ix} - 1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}.$$

Multiplicando esta igualdad por $e^{-ix/2}$ obtenemos que

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{\operatorname{sen}(x/2)}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} s_n(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt \end{aligned}$$

La periodicidad de las funciones que aparecen en esta fórmula y un cambio de variables muestran que

$$s_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt \tag{10.39}$$

Teorema 10.21 *Si para algún x existen constantes $\delta > 0$ y $M < \infty$ tales que*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t| \tag{10.40}$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f;x) = f(x). \tag{10.41}$$

Demostración. Definimos

$$g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\operatorname{sen}(t/2)}$$

para $0 < |t| \leq \pi$, y ponemos $g(0) = 0$. Por la definición del núcleo de Dirichlet tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = 1.$$

Por lo tanto, a partir de (10.39) tenemos que

$$\begin{aligned} s_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{sen}(n+\frac{1}{2})t\,dt. \end{aligned}$$

y ahora, como g es integrable según Riemann en $[a,b]$ podemos usar el lema de Riemann-Lebesgue para obtener el resultado. ∎

Corolario 10.2 *Si $f(x) = 0$ para todo x en un intervalo I, entonces* $\lim s_n(f;x) = 0$ *para todo $x \in I$.*

Otra formulación de este corolario es la siguiente:
Si $f(t) = g(t)$ para todo t en una vecindad de x, entonces

$$s_n(f;x) - s_n(g;x) = s_n(f-g;x) \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Para la demostración del próximo teorema necesitamos la siguiente versión del teorema de Stone-Weierstrass, que enunciamos sin demostración. Un álgebra $\mathcal{A}$ de funciones complejas es *auto-adjunta* si para toda $f \in \mathcal{A}$ se tiene que $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Teorema 10.22 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra auto-adjunta de funciones complejas continuas en un conjunto compacto K, $\mathcal{A}$ separa puntos en K y no se anula en ningún punto de K. Entonces la clausura uniforme $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ consiste de todas las funciones complejas continuas sobre K, es decir, $\mathcal{A}$ es densa en $\mathcal{C}(K)$.*

Teorema 10.23 *Si f es continua y periódica (con período 2π) y si $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trogonométrico P tal que*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si identificamos x y $x + 2\pi$ podemos considerar las funciones periódicas de período 2π sobre $\mathcal{R}$ como funciones sobre el círculo unitario T, por la transformación $x \mapsto e^{ix}$. Los polinomios trigonométricos forman un álgebra auto-adjunta $\mathcal{A}$ que separa puntos de T y no se anula en ningún punto de T. Como T es compacto, el teorema 10.22 dice que $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}(T)$. ∎

Lema 10.2 *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función continua g en $[a,b]$ tal que $||f - g|| < \varepsilon$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $S(P,f) - I(P,f) < \varepsilon$. Con base en esta partición definimos la función

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i)$$

Observamos que $g(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ y $g(x_i) = f(x_i)$ y la función está definida como una interpolación lineal entre estos dos puntos. Por lo tanto tenemos que para todo x en $[x_{i-1}, x_i]$,

$$|g(x) - f(x)| \leq M_i - m_i \leq 1$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)|^2 dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |M_i - m_i|^2 dx < \varepsilon
\end{aligned}$$

■

Teorema 10.24 *Sean f, g funciones integrables según Riemann con período 2π y*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Entonces $||f - s_n(f)|| \to 0$ y

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n} \tag{10.42}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ y $f(-\pi) = f(\pi)$ por el lema anterior tenemos una función h continua en $[-\pi,\pi]$, con período 2π tal que

$$||f - h|| < \varepsilon.$$

Por el teorema 10.23 existe un polinomio trogonométrico P tal que $|h(x) - P(x)| < \varepsilon/2\pi$ para todo x. Por lo tanto $||h - P|| < \varepsilon$. Si P tiene grado N, por (10.33) tenemos

$$||h - s_n(h)|| \leq ||h - P|| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Por la desigualdad de Bessel para $h - f$,

$$||s_n(h) - s_n(f)|| = ||s_n(h - f)|| \leq ||h - f|| < \varepsilon.$$

Combinando estas desigualdades con la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$||f - s_n(f)|| \leq ||f - h|| + ||h - s_n(h)|| + ||s_n(h) - s_n(f)|| \leq 3\varepsilon$$

Esto demuestra la convergencia a 0 de $||f - s_n(f)||$. Por otro lado

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)\overline{g}\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_n\overline{d_n}$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\Big|\int f\overline{g} - \int s_n(f)\overline{g}\Big| \leq \int |f - s_n(f)|\,|g| \leq \Big(\int |f - s_n(f)|^2 \int |g|^2\Big)^{1/2}$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por lo que acabamos de demostrar. A partir de esta desigualdad se obtiene (10.42). ■