Entrenamiento ORO 2023

Inducción Matemática - Revisited

Jesús Rodríguez Viorato

CONAHCyT - CIMAT

18-Sept-2023

Introducción

Es una parte de la inferencia

- Abducción
- Deducción
- Inducción

Despcrición

Es una técnica de demostración que permite pasar de lo particular a lo general.

Despcrición

Es una técnica de demostración que permite pasar de lo particular a lo general.

Formalmente

Sea $P(n)$ una proposición para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $P(0)$ es cierta
2. Si $P(n)$ es cierta entonces $P(n+1)$ es cierta.

Entonces, $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Formalmente

Sea $P(n)$ una proposición para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $P(1)$ es cierta
2. Si $P(n)$ es cierta entonces $P(n+1)$ es cierta.

Entonces, $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Demuestra que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Demuestra la siguiente identidad de suma de cuadrados:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Demuestra la siguiente identidad de suma de potencias

$$r^0 + r^1 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

3. Demuestra que n rectas en el plano en *posición general* dividen al plano en $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ regiones.

Variaciones de la Inducción

Inicio en a0

Sea $P(n)$ una proposición para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $P(a)$ es cierta
2. Si $P(n)$ es cierta entonces $P(n+1)$ es cierta.

Entonces, $P(n)$ es cierta para toda $n \geq a$.

Ejemplo

Demuestre que $2^n \geq 2n + 1$ para toda $n \geq 3$.

Theorem

Si $P(n)$ es una afirmación tal que:

1. *$P(0)$ y $P(1)$ son verdaderas*
2. *$P(n-1)$ y $P(n)$ implica $P(n+1)$ para todo $n \geq 1$*

Entonces $P(n)$ es verdad para toda $n \geq 0$

Ejemplo

Muestre que si $x + \frac{1}{x}$ es entero, entonces $x^n + \frac{1}{x^n}$ es entero para todo $n \in \mathbf{N}$.

Theorem

Si $P(n)$ es una afirmación tal que:

1. *$P(1)$ son verdaderas*
2. *Para toda n se tiene que:*
   $P(k)$ cierto para toda $k \leq n$ implica $P(n+1)$ para todo $n \geq 1$

Entonces $P(n)$ es verdad para toda $n \geq 1$

Ejemplo

Todo polígono *simple* con n lados, $n \geq 3$, puede ser triangulado en $n-2$ triángulos.

Cuidado con la Inducción Fuerte

Theorem

Si $P(n)$ es una afirmación tal que:

1. *$P(0)$ son verdaderas*
2. *Para toda n se tiene que:*
   $P(k)$ cierto para toda $k \leq n$ implica $P(n+1)$ para todo $n \geq 1$

Entonces $P(n)$ es verdad para toda $n \geq 0$

Ejemplo

Todos los Olímpicos son iguales.

Inducción de Cauchy

Theorem

Si $P(n)$ es una afirmación tal que:

1. *$P(1)$ es verdadera*
2. *$P(n)$ implica $P(2n)$ para todo $n \geq 1$*
3. *$P(n)$ implica $P(n-1)$ para toda $n \geq 2$*

Entonces $P(n)$ es verdad para toda $n \geq 1$

Ejemplo (Desigualdad de Jensen)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. *punto medio convexa*. Demostrar que

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n}.$$

Theorem

Si $P(n, m)$ es una afirmación tal que:

1. *$P(0, 0)$ es verdadera*
2. *$P(n, 0)$ implica $P(n+1, 0)$ para todo $n \geq 0$*
3. *$P(n, m)$ implica $P(n, m+1)$ para toda $n, m \geq 0$*

Entonces $P(n, m)$ es verdad para toda $n, m \geq 1$

Ejemplos

Sea F_n el n-ésimo número de Fibonacci, que se definen como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para $n \geq 1$.
Pruebe que para todo $n, m \geq 1$ se tiene que

$$F_{n+m+1} = F_{n+1} \cdot F_{m+1} + F_n \cdot F_m$$

Ejercicios de práctica

Ejercicios

1. Demuestre que el n-esimo número de Fibonnaci satisface la fórmula:
$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$
2. Demuestre que un cuadrado (geométrico) se puede dividir en $n \geq 6$ cuadrados (no necesariamente congruentes).
3. Demuestre que para $n \geq 3$, $n!$ se puede escribir como la suma de n de sus divisores distintos.
4. (*Identidad de Bernulli*)Demuestra eue para todo número real $x \geq -1$ y todo entero $n \geq 1$ se tiene que:
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

References

T. Andreescu and V. Crişan.
Mathematical Induction: A Powerful and Elegant Method of Proof.
XYZ Press, 2017.