Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 5.

Exercices.

Exo. 61 *Une remarque preliminaire:* la très importante propriété d'additivité dénombrable de l'intégrale des fonctions mesurables positives ne s'étend pas aux familles non dénombrables. Prouvez-le par un contre-exemple.
Exo. 62 En considérant l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, où ν est la mesure de comptage, traduire la propriété d'additivité dénombrable en termes de doubles suites $(x_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\bar{\mathbb{R}}_+$.
Exo. 63 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions tels que pour chaque n $f_n : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ est mesurable.

a) On suppose que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty.$$
Montrer que $g : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ definie par $g(x) = \sum_n |f_n(x)|$ est mesurable et presque partout finie, et integrable.

b) Montrer que la série $\sum_n f_n(x)$ converge pour presque par tout x et que si f dèsigne la somme de cette série là où elle existe, prolongée par ailleurs, on a que f est intégrable et
$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$
Prouver en particulier que cette somme a un sens.

Exo. 64 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que:
$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$
Trouver un contre-exemple à l'égalité.
Exo. 65 Soit μ une mesure finie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente dans $\mathbb{R}$ vers a. Trouver une condition suffisante sur $\mu(\{a\})$ pour qu'on ait:
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(]-\infty, a_n[) = \mu(]-\infty, a[).$$
Exo. 66 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\Big(e^{-nx} - 2e^{-2nx}\Big).$$

Calculer

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n \mathrm{d}\lambda \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \int f_n \mathrm{d}\lambda,$$

et conclure (63). (λ est la mesure de Borel sur la tribu borélienne de $\mathrm{I\!R}$).
Exo. 67 Montrer que

$$\int_{\mathrm{I\!R}_+^*} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

($\mathrm{d}x$ est la mesure de Borel).
Exo. 68 Soit $f : (\mathrm{I\!R}, \mathcal{B}, \mathrm{d}x) \to \mathrm{I\!R}$ une fonction telle que, pour tout réel a, la fonction $e^{ax} f(x)$ soit intégrable. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'on a

$$\int_{\mathrm{I\!R}} e^{zx} f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} I_n,$$

oú $I_n = \int x^n f(x) \mathrm{d}x$.
Exo. 69 Soit $f_n : (\mathrm{I\!R}, \mathcal{B}, \mathrm{d}x) \to \mathrm{I\!R}$ telle que

$$f_n(x) = 1\!\!1_{[0,n]}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}.$$

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) \mathrm{d}x$ suivant la valeur de α.
Exo. 70 Pour tout $t \in \mathrm{I\!R}$, montrer que l'intégrale

$$F(t) = \int_{\mathrm{I\!R}_+} f(t,x) \mathrm{d}x, \quad \text{existe, où} \quad f(t,x) = \frac{\log(t^2+x^2)}{1+x^2}.$$

Montrer que F est continue sur $\mathrm{I\!R}$, dérivable sur $]0,\infty[$. Pour $t > 0$, calculer $F'(t)$ puis $F(t)$ (On admettra que $F(0) = 0$). F est-elle dérivable en 0? De l'existence et de la valeur de la dérivée à droite de F en 0, déduire la valeur de

$$\int_{\mathrm{I\!R}_+} \frac{\log(1+u^2)}{u^2} \mathrm{d}u.$$

Exo 71 Soit $f : (\mathrm{I\!R}, \mathcal{B}, \mathrm{d}x) \to \mathrm{I\!R}$ qui est intégrable ainsi que $xf(x)$. Montrer que sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(t) = \int e^{itx} f(x) \mathrm{d}x,$$

est dérivable; exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Exprimer $\hat{f}'(t)$ à l'aide d'une intégrale, puis, montrer que $\hat{f}'(t) = -t/2\hat{f}(t)$. En déduire la valeur de $\hat{f}$ à une constante multiplicative près. Identifier la constante sous forme d'une intégrale.