

Licenciaturas en Matemáticas y en Computación
Universidad de Guanajuato
Tarea 8 de Álgebra Lineal II: Forma Racional.
lunes 22 de octubre de 2012
Fecha de entrega: lunes 29 de octubre de 2012.

Dado un campo K y una matriz $A \in M_{n \times n}(K)$, se dirá que A está en bloques racionales si

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

donde A_i es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_k \end{pmatrix}$$

para $i = 1, \dots, n$.

1. Hallar una matriz real A que esté en bloques racionales y que sea similar a la siguiente matriz real

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea A la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz real P , invertible, tal que $P^{-1}AP$ esté en bloques racionales.

3. Sean $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Demuestre que A y B son similares si, y sólo si, tienen el mismo polinomio característico y el mismo polinomio mínimo.
4. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matriz con coeficientes reales. Denote por L_A el endomorfismo de \mathbb{R}^n definido por $v \mapsto Av$. Suponga que $u + iv$ es vector propio de A asociado al valor propio $a + ib$, donde u y v son vectores con coeficientes reales.
 - a) Demuestre que $u - iv$ es vector propio asociado al valor propio $a - ib$. Esto es, demuestre que $a - ib$ también es valor propio de A y $u - iv$ es vector propio asociado a dicho valor. Demuestre también que el espacio vectorial real E , generado por u y v , es L_A -invariante.

- b) Demuestre que si $b \neq 0$ entonces u y v son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Calcule la matriz asociada a $L_A|_E$, la restricción de L_A a E , en la base $\{u, v\}$ para el caso $b \neq 0$.