Licenciaturas en Matemáticas y en Computación
Universidad de Guanajuato
Tarea 10 de Álgebra Lineal II: Proceso de Gram-Schmidt y Norma.
lunes 19 de noviembre de 2012
Fecha de entrega: lunes 26 de noviembre de 2012.

1. En cada uno de los siguientes incisos aplica el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt al conjunto S dado para obtener una base ortonormal de V.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,3,3)\}$.

   b) $V = P_2(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^2 f(t)g(t)dt$, $S = \{1,x,x^2\}$.

   donde $P_2(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado no mayor a 2.

   Definición Dado $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y $S \subset V$, S no vacío, se define $S^{\perp}$, *el complemento ortogonal de S*, como

   $$S^{\perp} = \{v \in V | \langle v,s\rangle \forall s \in S\}.$$

2. Sea $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, y sea W un subespacio vectorial de dimensión finita de V. Si $x \notin W$, prueba que existe $y \in V$ tal que $y \in W^{\perp}$, pero $\langle x,y\rangle \neq 0$.

3. Sea W un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno $(V,\langle\ ,\ \rangle)$. Pruebe que existe una proyección T sobre W tal que $\mathrm{Nuc}(T) = W^{\perp}$. Pruebe además que $\|T(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in V$.

4. Encuentre el polinomio real

   $$Q(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0$$

   para el cual la integral

   $$\int_{-1}^{1} Q(t)^2 dt$$

   alcanza el mínimo valor.