

# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.  
Unidad Guadalajara

---

## **Control Inteligente Híbrido de un Mini-helicóptero Autónomo**

Tesis que presenta:

**Héctor Manuel Becerra Fermín**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis

**Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos**

**Dr. Carlos Mario Vélez Sánchez**

Guadalajara, Jalisco, Septiembre de 2005.

# **Control Inteligente Híbrido de un Mini-helicóptero Autónomo**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Héctor Manuel Becerra Fermín**  
Ingeniero en Electrónica

Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán 1998-2003

Becario de Conacyt, expediente no. 180840

Directores de Tesis

**Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos**

**Dr. Carlos Mario Vélez Sánchez**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Septiembre de 2005.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción general de un helicóptero . . . . .	1
1.1.1. Principio de funcionamiento . . . . .	1
1.1.2. Partes principales . . . . .	2
1.1.3. Tipos de vuelo . . . . .	2
1.2. Características de un helicóptero . . . . .	3
1.2.1. Principales variables de estado . . . . .	3
1.2.2. Entradas de control . . . . .	4
1.3. Control de helicópteros . . . . .	4
1.3.1. Filosofía de control . . . . .	5
1.3.2. Acoplamiento entre dinámicas . . . . .	5
1.3.3. Retos del control de helicópteros . . . . .	6
1.4. Aplicaciones de un helicóptero autónomo . . . . .	7
1.5. Los helicópteros en miniatura . . . . .	8
1.5.1. Características de los mini-helicópteros . . . . .	8
1.5.2. Descripción del mini-helicóptero utilizado en esta tesis . . . . .	8
1.5.3. Trabajo relacionado con el control de mini-helicópteros . . . . .	10
<b>2. Modelación matemática</b>	<b>11</b>
2.1. Conceptos básicos . . . . .	11
2.1.1. Sistemas de referencia . . . . .	11
2.1.2. Condición de equilibrio (trim) . . . . .	12
2.2. Modelo matemático del mini-helicóptero X-Cell . . . . .	12
2.2.1. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido . . . . .	12
2.2.2. Extensión del modelo de cuerpo rígido . . . . .	15
2.2.3. Modelo de la velocidad del rotor, gobernador de velocidad y motor . . . . .	17
2.2.4. Cálculo de fuerzas y momentos . . . . .	18
2.2.5. Actuadores . . . . .	26
2.3. Modelo de simulación . . . . .	27

<b>3. Control inteligente híbrido difuso y PID</b>	<b>29</b>
3.1. Antecedentes . . . . .	29
3.1.1. Controladores PID . . . . .	29
3.1.2. Controladores difusos tipo Mamdani . . . . .	30
3.2. Esquema de control general . . . . .	32
3.3. Diseño del sistema de control . . . . .	33
3.3.1. Control de altitud y orientación . . . . .	34
3.3.2. Control lateral y longitudinal . . . . .	35
3.4. Resultados . . . . .	41
3.4.1. Desempeño de los controladores PID . . . . .	42
3.4.2. Desempeño de los controladores difusos . . . . .	46
3.4.3. Seguimiento de trayectoria en posición . . . . .	46
3.4.4. Comparación con trabajos previos . . . . .	50
<b>4. Control inteligente híbrido difuso, PID y regulación</b>	<b>51</b>
4.1. Antecedentes . . . . .	51
4.1.1. Teoría del regulador lineal . . . . .	51
4.2. Diseño del sistema de control . . . . .	53
4.2.1. Linealización de la planta . . . . .	54
4.2.2. Estabilización del sistema . . . . .	58
4.2.3. Diseño del regulador lineal . . . . .	59
4.3. Resultados . . . . .	60
4.3.1. Desempeño de la etapa de estabilización . . . . .	61
4.3.2. Desempeño incluyendo el regulador lineal . . . . .	66
4.3.3. Comparación con trabajos previos . . . . .	69
<b>5. Control inteligente híbrido difuso y no lineal</b>	<b>71</b>
5.1. Antecedentes . . . . .	71
5.1.1. Linealización exacta por realimentación del estado . . . . .	71
5.1.2. Modelo matemático simplificado . . . . .	77
5.2. Diseño . . . . .	79
5.3. Resultados . . . . .	83
5.3.1. Desempeño del sistema de control . . . . .	83
5.3.2. Comparación con trabajos previos . . . . .	88
<b>6. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A. Parámetros del sistema</b>	<b>95</b>
<b>B. Código de Maple</b>	<b>97</b>
<b>C. Código de Matlab</b>	<b>101</b>
<b>D. Artículos</b>	<b>105</b>

# Resumen

Esta tesis reporta la síntesis de tres diferentes controladores de vuelo para un mini-helicóptero X-Cell. Estos sistemas de control se desarrollan con base al modelo matemático más realista del que se dispone actualmente. Debido a que en este trabajo se combinan metodologías de inteligencia computacional (como lo es la lógica difusa) con otras técnicas de control, a los controladores de vuelo resultantes se les denomina sistemas de control inteligentes híbridos. Cada esquema de control propuesto imita la acción de un piloto humano, quien logra desplazar al helicóptero cambiando los ángulos de orientación de manera adecuada.

En cada sistema de control se utilizan controladores difusos tipo Mamdani para determinar los valores de referencia de un controlador de altitud y orientación. Estos controladores difusos se diseñan utilizando una base de reglas lo más simple posible. El controlador de altitud y orientación es distinto en cada caso. En el primer esquema está compuesto por controladores PID convencionales de una entrada y una salida, los cuales controlan la posición vertical, y los ángulos de rodaje, cabeceo y guiñada. En el segundo esquema se mantienen los controladores PID para rodaje y cabeceo, y se agrega un regulador lineal para controlar la altitud y el ángulo de guiñada. Finalmente, en el tercer esquema se diseña un controlador no lineal para altitud y orientación.

Con esta tesis se contribuye al proyecto colombiano denominado Colibrí, en el cual se trabaja para implementar en tiempo real los sistemas de control propuestos. En este trabajo los controladores se prueban en simulación y de acuerdo a los resultados, se logra buen desempeño al realizar vuelo estacionario y posicionamiento en el espacio tridimensional a bajas velocidades.



# Agradecimientos

Gracias a Dios por darme la oportunidad de decidir qué hacer con mi vida, y pensar que no me he equivocado.

Gracias a toda mi familia por comprender en tantas ocasiones la frase “no tengo tiempo”, y a pesar de ello, siempre seguir cerca de mí.

Gracias a los nuevos amigos: aquellos que sin la experiencia de vida que es una maestría, nunca hubiera tenido el honor de conocer. Gracias a los viejos amigos: esas personas especiales que me brindan su apoyo aún a la distancia, y al igual que la familia saben esperar.

Gracias a mis directores de tesis: Dr. Edgar N. Sánchez y Dr. Carlos M. Vélez por su profesionalismo en el desempeño de la difícil labor de formar recursos humanos de alto nivel.

Gracias a las instituciones que hacen posible cursar un posgrado de calidad en México: CONACYT y CINVESTAV.





# Introducción

La investigación reportada en este trabajo de tesis es una contribución al objetivo general del proyecto denominado Colibrí. Este proyecto es uno de los más importantes proyectos de investigación en desarrollo en Colombia. El objetivo general de este proyecto es: Diseño, implementación y experimentación de un sistema de control para un mini-helicóptero robot: Colibrí ([21]).

Debido a la maniobrabilidad de un helicóptero, su utilización es indispensable en aplicaciones civiles y militares, donde la intervención humana es difícil o peligrosa. Sin embargo, el diseño de un sistema de control para vuelo autónomo en un helicóptero, es una tarea desafiante. Las dinámicas de un helicóptero son inherentemente inestables, especialmente en vuelo estacionario, además de que son dominadas por sólo un elemento de la planta: el rotor principal. Gracias al rotor, un helicóptero tiene capacidades de despegue y aterrizaje vertical, a diferencia de un aeroplano.

La participación del presente trabajo en el proyecto Colibrí consiste en diseñar y probar mediante simulaciones, diferentes esquemas de control inteligente. Se propone que tales esquemas de control reproduzcan la acción de un piloto humano. El control de helicópteros requiere; primero, garantizar estabilidad del vehículo en diferentes puntos de operación, para mantenerlo en un estado de equilibrio deseado; y segundo, cambiar la velocidad, posición y orientación con el objetivo de seguir una trayectoria deseada. En mini-helicópteros, esto es usualmente hecho a través de un control remoto utilizado por un piloto humano.

El reporte del trabajo desarrollado se organiza en seis capítulos. El primer capítulo presenta algunas generalidades de la teoría básica necesaria para conocer el tipo de sistema que es un helicóptero, partiendo desde qué es, cómo funciona y cuales son las variables que describen su dinámica. También se presenta la filosofía de control utilizada por un piloto humano, destacando las dificultades que este proceso implica. En este capítulo se discute el caso de estudio particular para los mini-helicópteros y trabajos relevantes en el control de este tipo de vehículos.

El capítulo dos describe a detalle la modelación matemática del sistema en estudio: un mini-helicóptero X-Cell. El modelo matemático es tomado de [4]. Este modelo fue desarrollado por investigadores del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT de su nombre en inglés: Massachusetts Institute of Technology) con el objetivo de representar a un mini-helicóptero X-Cell de la manera más cercana posible a la realidad. De acuerdo a sus resultados y estableciendo comparaciones con otros modelos, éste es el modelo matemático más preciso disponible actualmente para un mini-helicóptero. Las catorce ecuaciones

diferenciales que describen las dinámicas del mini-helicóptero X-Cell son programadas en Simulink, como plataforma de prueba para controladores de vuelo que posteriormente serán implementados en tiempo real por el proyecto Colibrí.

Los siguientes tres capítulos se destinan a presentar el desarrollo de sistemas de control que combinan diferentes técnicas de control, entre ellas: lógica difusa, control PID, regulación en su caso lineal y linealización de entrada-salida. En todos los casos de combinación que se describen en estos tres capítulos, se incluye la lógica difusa. Al proceso de combinar metodologías de inteligencia computacional (como lógica difusa) con otras técnicas de control se le conoce como control inteligente híbrido.

En el tercer capítulo se presenta el primer esquema de control propuesto en esta tesis: un control inteligente híbrido que combina la teoría de lógica difusa con el control clásico. El diseño del sistema de control difuso y PID no se basa en el modelo matemático de la planta.

El capítulo cuatro muestra el diseño y resultados en simulación de un control inteligente híbrido, difuso, PID y teoría de regulación. El diseño para este esquema de control está basado en el modelo preciso de la planta, ya que se utiliza un regulador lineal para desempeñar tareas de seguimiento de trayectoria.

El capítulo cinco presenta el último esquema de control probado en simulación: un control inteligente híbrido, difuso y linealización exacta por realimentación del estado. Debido a la dificultad en la aplicación de técnicas de control no lineal, el diseño se realiza sobre un modelo matemático simplificado a partir del descrito en el segundo capítulo.

Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones obtenidas del desarrollo de la tesis. Este trabajo se culmina con la inclusión de información adicional en cuatro apéndices; tal como los parámetros del sistema, listados de programas para linealización del modelo de simulación y para el cálculo de ganancias del regulador lineal, así como uno de los artículos producidos que se presentó en conferencia.

# Capítulo 1

## Generalidades

En este capítulo se proporciona la información necesaria para tener un marco de referencia inicial en el conocimiento de un helicóptero. En la sección 1.1 se precisa lo que es un helicóptero, cómo funciona y cuáles con sus capacidades de vuelo. La sección 1.2 trata acerca de las principales características de estos vehículos, definiéndose las variables necesarias para su análisis. La sección 1.3 describe cómo se puede controlar un helicóptero y las dificultades que ello implica. En la sección 1.4 se resalta la importancia de los helicópteros autónomos. Ésta se debe a sus aplicaciones posibles. Finalmente, la sección 1.5 profundiza en el estudio de los mini-helicópteros. Se describen algunos trabajos significativos referentes al control de mini-helicópteros mediante diferentes técnicas de control.

### 1.1. Descripción general de un helicóptero

El propósito de esta sección es la introducción del conocimiento general de un helicóptero, iniciando por definir qué es este tipo de vehículo y cómo logra volar. También, se presentan las partes principales que componen a un helicóptero y finalmente los modos de vuelo en que éste es capaz de desempeñarse.

#### 1.1.1. Principio de funcionamiento

Un helicóptero es un aparato más pesado que el aire que no se eleva utilizando alas fijas sino mediante uno o varios rotores motorizados que giran alrededor de ejes verticales situados sobre el fuselaje. El helicóptero fue el primer tipo de aparato más pesado que el aire capaz de realizar un vuelo vertical.

Un avión está compuesto fundamentalmente por tres partes principales: fuselaje, alas y timones de dirección. Para que el avión vuele, éste debe estar en movimiento dentro de una masa de aire y dicho movimiento proporciona la sustentación del mismo a través de las alas.

Lo importante para lograr una fuerza de sustentación es el movimiento relativo entre alas y aire. Por lo contrario, en un helicóptero, se presenta movimiento permanente de *alas* dentro de una masa de aire. Las *alas* de un helicóptero son llamadas *aspas* o *palas*

del rotor principal. Las aspas del rotor tienen una forma aerodinámica similar a la de las alas de un avión; es decir, curvadas formando una elevación en la parte superior, y lisas o incluso algo cóncavas en la parte inferior. Al girar el rotor la forma de las palas las empuja hacia arriba y con ello al helicóptero. La velocidad del rotor principal es prácticamente constante; lo que hace que un helicóptero ascienda o descienda, es el ángulo de incidencia (inclinación) que tiene cada pala del rotor: a mayor inclinación, mayor empuje y viceversa.

El rotor de un helicóptero tiene normalmente dos o más palas dispuestas simétricamente alrededor de un eje central que las sujeta durante el giro. El rotor está impulsado por un motor, por lo general situado en el fuselaje, a través de unos engranajes que reducen la velocidad de rotación. Una característica importante del diseño de los helicópteros es el desarrollo de sistemas para contrarrestar el par de fuerzas, o fuerza de reacción, que se produce cuando la rotación del rotor en un sentido tiende a girar al fuselaje en el sentido contrario. La forma más común de sistema antipar es una hélice más pequeña (rotor de cola) en un lado de su parte posterior. Este rotor está instalado verticalmente y compensa con su empuje la tendencia a girar del helicóptero.

### 1.1.2. Partes principales

En la figura 1.1, se presentan las partes principales que constituyen un helicóptero. La sustentación se logra a través de un diseño aerodinámico adecuado de cada uno de estos elementos. Todas las partes son diseñadas de tal forma que al momento del vuelo, existan las condiciones de control que sean capaces de equilibrar las tres fuerzas principales involucradas en el sistema: empuje/sustentación, peso y resistencia.

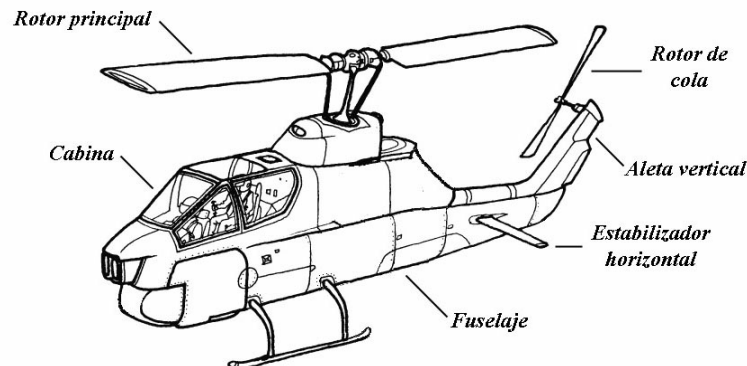


Figura 1.1: Partes principales de un helicóptero.

### 1.1.3. Tipos de vuelo

Un helicóptero puede desarrollar varios tipos de vuelo. Algunos de ellos son imposibles de realizarse en otro tipo de aeronave, lo que le proporciona al helicóptero ventajas

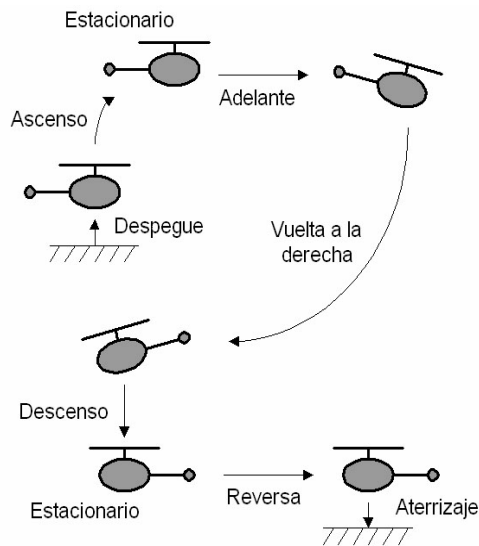


Figura 1.2: Tipos de vuelo de un helicóptero.

sustanciales en sus diferentes aplicaciones. La figura 1.2 muestra los diferentes modos de vuelo de un helicóptero, donde destacan el modo de reversa y el vuelo estacionario, como exclusivos de este tipo de vehículo.

## 1.2. Características de un helicóptero

En esta sección se mencionan las principales variables de estado implicadas en el funcionamiento de un helicóptero. Se presentan sólo las variables de estado que describen el movimiento del vehículo; sin embargo, al momento de modelarlo como un sistema dinámico, pueden requerirse variables de estado adicionales. Además, se incluye la descripción de las entradas de control.

### 1.2.1. Principales variables de estado

Un helicóptero es un sistema de seis grados de libertad. Los grados de libertad describen la posibilidad de movimiento de un cuerpo. Un mecanismo que tiene plena libertad de movimiento posee seis grados de libertad. Tres son de traslación; para moverse en cada una de las tres dimensiones. Los otros tres grados de libertad son de rotación; para cambiar el ángulo de inclinación alrededor de los tres ejes perpendiculares que se trazan de forma longitudinal, transversal y vertical al fuselaje. Los seis grados de libertad posibles en un helicóptero se definen como sigue, y cada uno de ellos está asociado a una variable de estado del sistema:

- Traslación longitudinal ( $x$ ). Es el movimiento hacia adelante y hacia atrás.

- Traslación lateral ( $y$ ). Es el movimiento a la derecha y a la izquierda.
- Traslación vertical ( $z$ ). Es el movimiento de ascenso y descenso. Determina la altitud del vehículo.
- Rodaje ( $\phi$ ). Es la rotación alrededor del eje imaginario trazado a lo largo del vehículo desde la cola a la nariz.
- Cabeceo ( $\theta$ ). Es la rotación alrededor del eje imaginario transversal al cuerpo del vehículo.
- Guiñada ( $\psi$ ). Es la rotación alrededor del eje imaginario trazado paralelo al eje del rotor.

Los tres grados de libertad para rotación constituyen los llamados ángulos de Euler. Los ángulos de Euler son una forma de representar rotaciones en el espacio Euclidiano tridimensional como un producto de tres rotaciones sucesivas en dos dimensiones, alrededor de los ejes  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$ .

Las seis variables de estado definidas son las más importantes en el control de un helicóptero, ya que determinan la posición y la orientación del aparato en el espacio tridimensional. Sin embargo, la velocidad de cambio de dichas variables también es importante. Para cuestiones de control, regularmente se requiere conocer las velocidades lineales ( $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ) y las velocidades angulares ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ).

### 1.2.2. Entradas de control

Un helicóptero tiene cuatro entradas de control: cíclico longitudinal y cíclico lateral para movimientos horizontales en sus direcciones respectivas, colectivo para movimiento vertical, y pedales de antitorque para movimiento de guiñada.

En helicópteros de tamaño real existen dos palancas; una de las cuales es sólo el control colectivo y la otra es el control cíclico longitudinal y lateral simultáneamente. La entrada de pedales debe su nombre a que en realidad existen mecanismos para su manipulación con los pies. Para helicópteros en miniatura las entradas se proporcionan mediante las palancas de un radio control.

## 1.3. Control de helicópteros

Como parte de esta sección se presenta la filosofía de control utilizada en el control de helicópteros. Esta forma de control es la definida por las características del mismo vehículo y es la que utiliza un piloto a través de las palancas y pedales de un helicóptero de tamaño normal, o mediante un radio control en un mini-helicóptero. Se exponen los efectos indeseables que ocurren entre las diferentes variables cuando se manipulan las entradas para lograr un movimiento. Estos efectos se deben al acoplamiento entre dinámicas. Estas y otras dificultades presentes en el control de helicópteros se enlistan en la parte final de la sección.

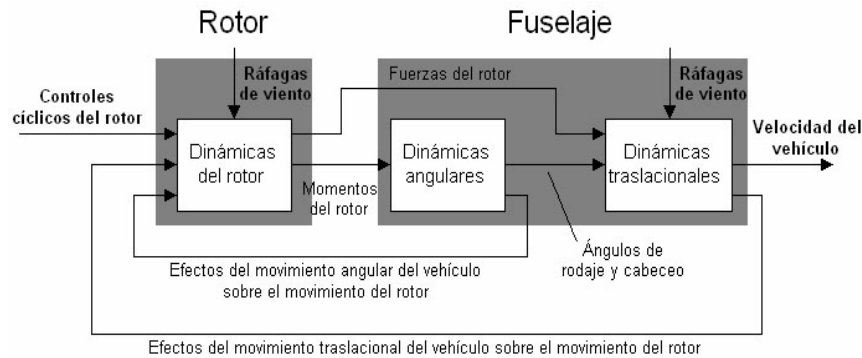


Figura 1.3: Diagrama de bloques de los subsistemas envueltos en el problema del control de un helicóptero.

### 1.3.1. Filosofía de control

Las funciones primarias de los cuatro comandos principales de un helicóptero son las siguientes: las entradas cíclico lateral y longitudinal controlan los momentos de rodaje y cabeceo producidos por el rotor principal; la entrada colectivo controla la magnitud de la fuerza de empuje del rotor principal; la entrada colectivo del rotor de cola (pedales) controla la fuerza de empuje del rotor de cola. De esta manera, los comandos tienen un efecto directo sobre la velocidad de rodaje y cabeceo, velocidad vertical y velocidad de guiñada, respectivamente.

El piloto no controla la posición o la velocidad directamente, sino a través de una cadena de efectos que pueden resumirse como sigue. Las entradas de control cíclico resultan en variación del momento aplicado sobre el centro del disco del rotor, mediante un movimiento de inclinación de dicho disco. El disco del rotor es el que las hélices describen en su movimiento y es usado como una representación simplificada de los efectos combinados del movimiento individual de aspas. El control de momento del rotor produce un movimiento de rodaje y cabeceo del fuselaje. Si el helicóptero está en vuelo estacionario, cambiar los ángulos de rodaje y cabeceo del fuselaje, resultará en una inclinación del vector de fuerza de empuje del rotor; esto produce componentes de empuje horizontales que actúan como fuerzas de propulsión. Por ejemplo, al mantener un ángulo de cabeceo constante, el helicóptero acelerará hasta que la fuerza de propulsión es balanceada por las fuerzas aerodinámicas de resistencia. En estado estable, un ángulo de cabeceo o rodaje constante se traduce en una velocidad longitudinal o lateral también constante. La figura 1.3 muestra un diagrama de bloques de los subsistemas involucrados en el problema de control longitudinal-lateral.

### 1.3.2. Acoplamiento entre dinámicas

Al momento de manipular las entradas para lograr un movimiento, otros efectos también necesitan ser compensados. Dichos efectos son llamados secundarios y son consecuen-



cias indirectas producidas por los controles.

Algunos de los efectos secundarios, o efectos de ejes cruzados, se aprecian fácilmente en el control de velocidad longitudinal. Cuando el helicóptero es inclinado hacia el frente, la componente de empuje vertical decrecerá, requiriendo un incremento en la magnitud de la fuerza de empuje para mantener el nivel de altitud del vehículo. Sin embargo, este incremento en el empuje producirá un torque de reacción en el eje del rotor, que a su vez resultará en un momento de guiñada, para lo cual, el piloto necesitará ajustar el empuje del rotor de cola.

Otros efectos son más sutiles, tales como la respuesta del rodaje, producto de las acciones de control cíclico longitudinal y colectivo, y la respuesta del cabeceo respecto a la acción de control cíclico lateral; por ejemplo, cuando un helicóptero vuela en ascenso se mueve a la derecha y la nariz también gira a la derecha. La fuerza de empuje del rotor de cola también puede causar un movimiento lateral y un momento de rodaje. Con esto, se observa que un objetivo de movimiento no se alcanza con el comando de sólo en una entrada, sino que es necesario maniobrar otras entradas simultáneamente para compensar los acoplamientos cruzados.

### 1.3.3. Retos del control de helicópteros

Además de que un helicóptero es modelado como un sistema no lineal de mediano orden, las principales características que presentan dificultades en el diseño de controles de vuelo para estos vehículos, se exponen a continuación:

- **Dinámicas de vuelo cambiantes:** Las dinámicas de vuelo cambian dependiendo del tipo de vuelo desarrollado. En vuelo estacionario, un helicóptero se comporta de forma similar sobre los ejes lateral y longitudinal. La tarea de control en este tipo de vuelo es posicionar al helicóptero en el sistema de coordenadas cartesianas. Para esto, intervienen cuatro grados de libertad, que son las posiciones longitudinal, lateral y vertical, además de la guiñada. En el caso ideal, las cuatro entradas proporcionan control independiente sobre estos cuatro grados de libertad. En contraste, en vuelo hacia adelante, el comportamiento del helicóptero es cercano al de una aeronave de alas fijas: el helicóptero es orientado de acuerdo a la dirección de movimiento; la entrada cíclico longitudinal actúa como un elevador; la entrada cíclico lateral actúa como los alerones; los pedales como timón de dirección y la entrada colectivo permite cambiar la altitud independientemente del ángulo de ataque de la nave. De forma similar a un aeroplano, el comportamiento del vehículo puede ser dividido en dinámica lateral-direccional y longitudinal-vertical. Con esto, se observa que un control lineal en vuelo estacionario no será efectivo más allá de cierta velocidad de vuelo.
- **Comportamiento multivariable:** Un helicóptero, con sus seis grados de libertad y cuatro variables de control, es un sistema multivariable, que además se clasifica como un sistema subactuado. El hecho de que exista un mayor número de grados de libertad en comparación con las entradas de control, crea diversos acoplamientos

entre las dinámicas del sistema. Para lograr una respuesta adecuada, se requiere una coordinación precisa de los controles de entrada.

- **Inestabilidad:** Las dinámicas de orientación de un helicóptero son condicionalmente estables; se requiere una mínima cantidad de realimentación de orientación para que el sistema sea estable; sin embargo, una realimentación muy fuerte desestabiliza al sistema.
- **Dinámicas de alto orden:** Los helicópteros, a diferencia de la mayoría de las aeronaves de alas fijas no pueden ser modelados de manera precisa sólo por las dinámicas de cuerpo rígido; es necesario incluir las dinámicas de batimiento del rotor, el sistema de comando del motor, las dinámicas del flujo de aire interior y otras componentes, tales como la barra estabilizadora.
- **Sensibilidad a perturbaciones:** El rotor principal es sensible a perturbaciones atmosféricas. Las ráfagas de viento cambian las condiciones aerodinámicas en el rotor y consecuentemente afectan la sustentación local en las aspas. Este tipo de perturbaciones son no medibles, ya que son detectadas después de que han afectado la respuesta del vehículo.

## 1.4. Aplicaciones de un helicóptero autónomo

Esta sección presenta algunas de las aplicaciones para las que se han destinado los helicópteros no piloteados, ya sean de tamaño normal o miniaturas. Existe una multiplicidad de posibles aplicaciones, además de los obvios requerimientos militares. Estas aplicaciones se pueden clasificar en dos grandes áreas: misiones típicas y misiones peligrosas. Cualquiera de las siguientes misiones puede ser desempeñada por un helicóptero autónomo no piloteado.

En las aplicaciones referentes a misiones típicas se tiene:

- Toma de fotografías aéreas.
- Medición de contaminación del aire.
- Aspersión agrícola.
- Búsqueda de peces.
- Inspección de tuberías de petróleo.
- Monitoreo de las condiciones de tráfico.
- Monitoreo de líneas ferroviarias.
- Monitoreo de las costas marítimas.

Como misiones peligrosas, se pueden mencionar:

- Rescates marítimos.
- Rescates en montaña.
- Monitoreo de accidentes en tanques de petróleo, plantas nucleares, etc.
- Combate de incendios en áreas remotas o peligrosas: montañas, edificios altos, etc.
- Visualización de fenómenos naturales: erupciones volcánicas, terremotos, etc.
- Búsqueda de aeronaves accidentadas.
- Análisis de experimentos riesgosos en helicópteros piloteados.

## 1.5. Los helicópteros en miniatura

En esta sección se aborda el tema de los helicópteros en miniatura. Se inicia por destacar algunas de las características inherentes a ellos, continuando por describir el caso particular abordado en este trabajo de tesis. La sección se concluye haciendo referencia a algunos de los trabajos de investigación más importantes relacionados con el control de estos vehículos.

### 1.5.1. Características de los mini-helicópteros

Para establecer un punto de comparación inicial entre los helicópteros de escala pequeña y aquellos de tamaño normal, se puede decir que los primeros tienen rotores cuyo diámetro es entre cinco y diez veces más pequeño que los rotores de su contraparte.

Un helicóptero en miniatura es, de manera natural, más ágil que los de tamaño normal. Sus características principales son: cuando el tamaño del vehículo decrece, los momentos de inercia también lo hacen, mientras que la fuerza de empuje del rotor decrece proporcionalmente a la masa del vehículo. También, muchos de estos helicópteros pueden producir empuje negativo, permitiendo desarrollar vuelo invertido. La combinación de estos efectos y sus características de diseño permiten grandes y rápidas ejecuciones angulares, lo cual es un ingrediente para el desarrollo de vuelos acrobáticos que sólo pueden lograrse con este tipo de aeronaves.

### 1.5.2. Descripción del mini-helicóptero utilizado en esta tesis

El desarrollo de esta tesis es una contribución al objetivo general de un proyecto de investigación en curso en la ciudad de Medellín, Colombia. El proyecto es llamado Colibrí [21], y fue aceptado por las respectivas instituciones de evaluación de proyectos de investigación de dicho país en 2003. El proyecto Colibrí decidió utilizar un mini-helicóptero del



Figura 1.4: Mini-helicóptero X-Cell.

tipo X-Cell como plataforma de investigación y es por esta razón que el trabajo reportado en este trabajo se basa en dicho vehículo. El mini-helicóptero X-Cell, presentado en la figura 1.4, es un vehículo representativo de los que son utilizados hoy en día para la investigación.

Este mini-helicóptero es altamente maniobrable, como resultado de la rigidez de la cabeza de su rotor, lo que permite la transmisión de grandes momentos de control desde el rotor hacia el fuselaje. Además, posee una gran relación de empuje-peso y una velocidad rápida del rotor. Está equipado con un motor eléctrico y un gobernador de velocidad para mantener constante la velocidad del rotor. Como la mayoría de los mini-helicópteros, también está equipado con una barra estabilizadora que actúa como una realimentación retardada del cambio de orientación y es diseñada para ayudar al piloto a controlar las dinámicas de orientación.

La tabla 1.1 proporciona información sobre características del mini-helicóptero X-Cell, tales como sus dimensiones, su peso, y el tiempo que es capaz de permanecer en vuelo.

Tabla 1.1: Características del mini-helicóptero X-Cell.

Característica	Valor
Peso	7.7 (8.2) Kg
Diámetro del rotor	1.55 m
Altura	0.43 m
Longitud	1.35 m
Velocidad del rotor	1600-1700 rpm (167 rad/s)
Autonomía de vuelo	15 min

### 1.5.3. Trabajo relacionado con el control de mini-helicópteros

Actualmente, el diseño e implementación de sistemas de control para helicópteros no piloteados ha sido objeto de un buen número de trabajos de investigación. El control de vehículos autónomos conforma una nueva y creciente área de investigación multidisciplinaria. Concretamente, los proyectos de investigación usando helicópteros de escala reducida se iniciaron en instituciones académicas a inicios de los años noventas del siglo pasado. A continuación se describen brevemente cuatro de los trabajos de investigación más relevantes en el control de mini-helicópteros.

El primer proyecto de gran magnitud en el área fue desarrollado por el Instituto de Tecnología de Tokio, bajo la dirección del reconocido investigador Michio Sugeno. Los resultados de este proyecto, implementado en tiempo real, se reportan en [19]. Ahí se establece el diseño de un controlador jerárquico de tipo Mamdani para un helicóptero Yamaha R-50. La capa inferior del controlador contiene cinco módulos de controladores difusos, los cuales son: longitudinal, lateral, colectivo, control de dirección y compensación de acoplamiento. La capa superior se utiliza para calcular la condición de equilibrio y para interpretar comandos de voz a los que responde el sistema.

Bernard Mettler, después de un trabajo extensivo sobre identificación del modelo matemático de mini-helicópteros, el cual se basa en análisis de frecuencia, describe en [12] un sistema de control proporcional-derivativo implementado en tiempo real sobre la plataforma Yamaha R-50. Tal sistema fue probado originalmente sobre un mini-helicóptero equipado de la Universidad de Carnegie Mellon. Su desempeño fue suficiente para cumplir con posicionamiento básico y vuelo estacionario.

Otro reconocido investigador, Shankar Sastry, reporta en [8] un diseño basado en el modelo no lineal del helicóptero no piloteado Ursa-Minor. El diseño se realiza mediante linealización aproximada de entrada-salida del modelo no lineal. En este caso, linealización aproximada significa que el modelo fue reducido al desprestigiar algunos efectos de acoplamiento. Como salidas se consideran las posiciones respecto a cada eje coordenado y el ángulo de guiñada. Para lograr desacoplar las entradas del sistema se aplica un algoritmo de desacoplamiento dinámico. Con esto, se obtiene un modelo lineal que no contiene dinámicas no observables (dinámica cero). El desempeño del controlador obtenido se muestra en resultados de simulación.

Finalmente, el resultado más reciente se reporta en [6]. Esta investigación, desarrollada por investigadores suecos, propone el diseño de un controlador basado en ganancia preprogramada difusa. El diseño de los controladores lineales utiliza la técnica  $H_\infty$  para encontrar ganancias de realimentación que controlen la altitud y los ángulos de rodaje, cabeceo, guiñada. El modelo no lineal en el que se basa el diseño representa aproximadamente a un mini-helicóptero real, el APID-MK3. Los resultados de este trabajo son ilustrados por simulación extensiva.

# Capítulo 2

## Modelación matemática

Este capítulo presenta en detalle el modelo matemático del sistema que es objeto de estudio de la presente tesis. La sección 2.1 introduce brevemente dos conceptos citados constantemente a lo largo del capítulo: los sistemas de referencia y la condición de equilibrio. La sección 2.2 describe ampliamente las ecuaciones diferenciales implementadas en un modelo de simulación. El modelo matemático se basa en el trabajo de investigadores del MIT reportado en [4].

### 2.1. Conceptos básicos

Esta sección trata acerca de dos conceptos requeridos a lo largo del trabajo posterior. El primero de ellos es relativo a los sistemas de referencia. Se definen los diferentes sistemas de referencia utilizados en la descripción del movimiento de un helicóptero. El segundo concepto es el de condición de equilibrio. Al respecto, se establece la condición de equilibrio en el contexto de los helicópteros.

#### 2.1.1. Sistemas de referencia

Un sistema de referencia es un enfoque empleado para describir los movimientos de los cuerpos. Hay diferentes tipos de sistemas de referencia. Un sistema de referencia fijo es aquel que está unido a un entorno o a un cuerpo. Un sistema de referencia móvil es aquel que puede trasladarse o rotar. El sistema de referencia fijo se vuelve móvil siempre que se mueva el cuerpo al que está unido. Cuando un sistema de referencia fijo o móvil se mueve a una velocidad constante, se dice que es un sistema inercial. En un sistema de referencia inercial, el observador se mueve sin la influencia de ninguna fuerza acelerante o desacelerante.

El término sistema coordinado es ligeramente diferente al de sistema de referencia, ya que el primero determina la forma de describir/observar el movimiento en cada sistema de referencia. El sistema coordinado puede ser cartesiano o polar: esférico o cilíndrico.

### 2.1.2. Condición de equilibrio (trim)

Se dice que un helicóptero está en equilibrio si todas las fuerzas, aerodinámicas y gravitacionales, y los momentos aerodinámicos actuando sobre el centro de gravedad del helicóptero están en balance. Esto equivale a decir que las condiciones de equilibrio para un sistema modelado por una función no lineal  $f$ , se obtienen fijando los estados conocidos a los valores que caracterizan el punto de operación y resolviendo la ecuación de equilibrio  $f(x, u) = 0$ , para los estados restantes y para las entradas de control. Un punto de equilibrio trivial en un helicóptero, pero significativo físicamente, es la condición de vuelo estacionario. Esta condición de vuelo está definida por velocidad lineal y angular cero:

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 = [0, 0, 0]^T$$

## 2.2. Modelo matemático del mini-helicóptero X-Cell

En esta sección se describen las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden que modelan matemáticamente al mini-helicóptero X-Cell. La descripción comienza por las ecuaciones principales del modelo, las cuales representan la dinámica del sistema visto como un cuerpo rígido. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido no son suficientes para describir fielmente al sistema. Por ello se agregan las expresiones que modelan dinámicas relevantes para el comportamiento general. Estas dinámicas pertenecen al rotor principal y a los actuadores. También se modela la velocidad del rotor y el sistema cuya función es mantenerla constante.

El modelo matemático del mini-helicóptero X-Cell utilizado en este trabajo está basado en [4]. Este modelo fue desarrollado en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), con el objetivo de obtener una representación con la menor complejidad y precisión posible a través de condiciones de vuelo extremas. Este modelo logra dicho objetivo debido a que su desarrollo se basa en las características particulares de los mini-helicópteros altamente maniobrables. El modelo es descrito por 17 variables de estado y cubre un amplio rango de condiciones de vuelo, desde vuelo estacionario hasta vuelo hacia adelante a una velocidad de aproximadamente 20 m/s, lo cual corresponde a una razón de avance baja ( $\mu \leq 0.15$ ). Sin embargo, esto permite considerar que la fuerza de empuje, producida por el rotor, es siempre perpendicular al disco que las hélices describen en su movimiento.

### 2.2.1. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido

Las dinámicas de cuerpo rígido de un helicóptero son descritas por las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler. De acuerdo a los principios cinemáticos de los sistemas de referencia móviles, dichas ecuaciones con respecto al sistema de referencia fijo al cuerpo son:

$$m\dot{\mathbf{v}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$  es el vector de velocidades lineales en los ejes fijos al cuerpo  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente;  $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$  es el vector de velocidades angulares para cabeceo, rodaje y guiñada, respectivamente;  $\mathbf{F} = [F_X \ F_Y \ F_Z]^T$  es el vector de fuerzas externas actuando sobre el centro de gravedad (c.g.) del vehículo,  $\mathbf{M} = [L \ M \ N]^T$  es el vector de momentos externos,  $m$  es la masa del helicóptero e  $\mathbf{I} \in M^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia con elementos  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ ,  $I_{xz}$ , etc. Las fuerzas y momentos externos son producidos por los rotores, principal y de cola, la fuerza gravitacional y las fuerzas aerodinámicas del fuselaje y de las superficies de la cola, las cuales actúan como estabilizadores.

Las tres ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de traslación (2.3) sobre los tres ejes de referencia fijos al cuerpo, con origen en el centro de gravedad del vehículo, se derivan a partir de (2.1), y son:

$$\dot{u} = vr - wq - g \sin \theta + (X_{mr} + X_{fus})/m \quad (2.3)$$

$$\dot{v} = wp - ur + g \sin \phi \cos \theta + (Y_{mr} + Y_{fus} + Y_{tr} + Y_{vf})/m$$

$$\dot{w} = uq - vp + g \cos \phi \cos \theta + (Z_{mr} + Z_{fus} + Z_{ht})/m$$

donde  $\phi$  es el ángulo de rodaje,  $\theta$  es el ángulo de cabeceo y  $g$  es la aceleración de la gravedad. De manera similar, las tres ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el movimiento rotacional del helicóptero (2.4), se derivan a partir de (2.2). Estas ecuaciones no dependen del sistema de referencia en que se trabaje.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}qr + \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}pq + \\ &+ \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}L + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}N \\ \dot{q} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}}pr - \frac{I_{xz}}{I_{yy}}(p^2 - r^2) + \frac{1}{I_{yy}}M \\ \dot{r} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy})I_{xx} - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}pq - \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}qr + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}L + \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}N \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $L = L_{mr} + L_{vf} + L_{tr}$ ,  $M = M_{mr} + M_{ht}$ ,  $N = -Q_e + N_{vf} + N_{tr}$  son los momentos externos para cada uno de los ejes. Los subíndices hacen referencia a los componentes respectivos que generan fuerza o momento: rotor principal (mr), rotor de cola (tr), fuselaje (fus), y los estabilizadores; aleta vertical (vf) y cola horizontal (ht). Estas fuerzas y momentos se muestran junto con las principales variables del helicóptero en la figura 2.1.  $Q_e$  es el torque producido por el motor para contrarrestar el torque aerodinámico en



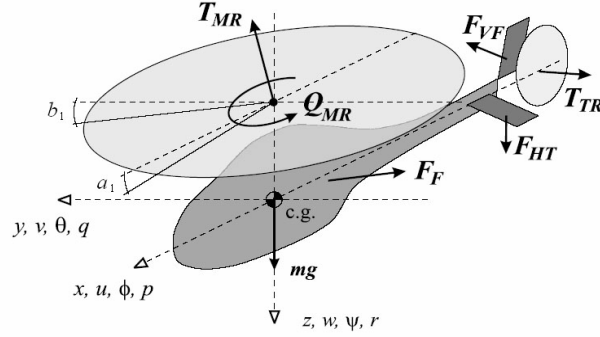


Figura 2.1: Fuerzas y momentos que actúan en el helicóptero.

las aspas del rotor. En las ecuaciones anteriores, se supone que el centro de presión del fuselaje coincide con el centro de gravedad, de tal forma que los momentos generados por las fuerzas aerodinámicas del fuselaje son despreciados.

Las seis ecuaciones diferenciales previas constituyen las ecuaciones de cuerpo rígido. Es posible conocer las posiciones inerciales  $(x, y, z)$  y los ángulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  a partir de ellas, usando la transformación lineal adecuada. Los ángulos de Euler proporcionan información sobre la orientación del vehículo al medir el ángulo de rodaje  $(\phi)$ , el ángulo de cabeceo  $(\theta)$  y el ángulo de guiñada  $(\psi)$ . Resolver las tres ecuaciones diferenciales siguientes permite conocer las posiciones inerciales a partir de las velocidades fijadas al cuerpo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$R = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Definida de esta manera,  $R$  es la transformación del sistema de referencia fijo al cuerpo al inercial.  $c\theta$  y  $s\theta$  son abreviaciones para  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ , respectivamente. Ya que  $R$  es una matriz de rotación, posee algunas propiedades importantes:

- Puede ser descrita como el producto de matrices de rotación individuales.
- Es una matriz ortogonal.
- Su determinante es la unidad.

Las velocidades inerciales  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  corresponden a la llamada velocidad respecto a tierra, cuyos sentidos están definidos por  $\dot{x} = V_{norte}$ ,  $\dot{y} = V_{este}$ ,  $\dot{z} = V_{abajo}$  [24]. Con esto, los sentidos positivos para el movimiento en los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son hacia el norte, este

y abajo respectivamente. Esto significa que la solución para  $z$  de (2.5) resulta de signo contrario a la definición convencional (positivo hacia arriba), por lo que se debe invertir  $z$  para obtener la altitud con signo adecuado.

Finalmente, para conocer los ángulos de Euler a partir de las velocidades angulares, se utiliza la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t\theta s\phi & t\theta c\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Extensión del modelo de cuerpo rígido

Para mejorar la precisión del modelo de cuerpo rígido, se toman en cuenta efectos de alto orden, los cuales se agregan a las dinámicas de cuerpo rígido. Estos efectos son: dinámicas del rotor, velocidad del rotor y gobernador de la misma, así como dinámica de los actuadores. Las primeras son críticas porque en el X-Cell las fuerzas y momentos del rotor principal dominan ampliamente la respuesta dinámica del vehículo. En esta subsección sólo se hace referencia a las dinámicas del rotor; las demás extensiones del modelo se establecen en subsecciones posteriores. El acoplamiento entre el rotor y la barra estabilizadora son considerados en una sola ecuación de primer orden para cada ángulo de batimiento: lateral ( $b_1$ ) y longitudinal ( $a_1$ ), de acuerdo a la teoría de la trayectoria del plano superior (TPP) [12]. El batimiento se describe como el movimiento de las aspas hacia arriba y hacia abajo debido a las bisagras que las unen al mecanismo de control del rotor, tal como se muestra en la figura 2.2.

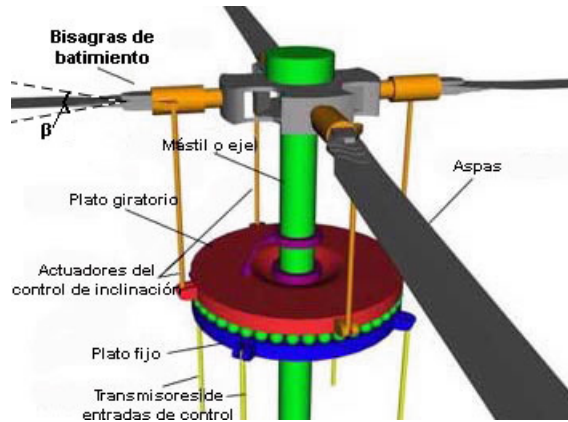


Figura 2.2: Mecanismo de control del rotor.

Las dinámicas de batimiento son muy poco amortiguadas, y se deben contemplar explícitamente para el diseño de un sistema de control de posición de amplio ancho de banda. Las dos ecuaciones que determinan estas dinámicas son:

$$\begin{aligned}\dot{b}_1 &= -p - \frac{b_1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \frac{\partial b_1}{\partial \mu_v} \frac{v - v_w}{\Omega R} + \frac{B_{\delta_{lat}}}{\tau_e} \delta_{lat} \\ \dot{a}_1 &= -q - \frac{a_1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \left( \frac{\partial a_1}{\partial \mu} \frac{u - u_w}{\Omega R} + \frac{\partial a_1}{\partial \mu_z} \frac{w - w_w}{\Omega R} \right) + \frac{A_{\delta_{lon}}}{\tau_e} \delta_{lon}\end{aligned}\quad (2.8)$$

donde  $B_{\delta_{lat}}$  y  $A_{\delta_{lon}}$  son las ganancias efectivas de estado estable lateral y longitudinal de las entradas cíclicas a los ángulos de batimiento del rotor principal;  $\delta_{lat}$  y  $\delta_{lon}$  son las entradas de control cíclico lateral y cíclico longitudinal;  $u_w$ ,  $v_w$  y  $w_w$  son las componentes de velocidad del viento a lo largo de los ejes fijos al cuerpo  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente;  $\Omega$  es la velocidad y  $R$  el radio del rotor principal;  $\tau_e$  es la constante de tiempo efectiva del rotor, cuando existe una barra estabilizadora.

Un valor aproximado de la constante de tiempo de amortiguamiento para el movimiento de batimiento está dado por (2.9).

$$\tau_e = \frac{16}{\gamma_{fb} \Omega_{mr}} \quad (2.9)$$

donde  $\gamma_{fb}$  es el numero de Lock de la barra estabilizadora [12]. Experimentos realizados durante el desarrollo de este modelo indican que los valores de  $A_{\delta_{lon}}$  y  $B_{\delta_{lat}}$  crecen con la velocidad del rotor [4], así que este efecto se aproxima de acuerdo a lo siguiente:

$$\begin{aligned}A_{\delta_{lon}} &= A_{\delta_{lon}}^{nom} \left( \frac{\Omega_{mr}}{\Omega_{nom}} \right)^2 \quad \text{rad/rad} \\ B_{\delta_{lat}} &= B_{\delta_{lat}}^{nom} \left( \frac{\Omega_{mr}}{\Omega_{nom}} \right)^2 \quad \text{rad/rad}\end{aligned}$$

donde  $A_{\delta_{lon}}^{nom}$  y  $B_{\delta_{lat}}^{nom}$  son las ganancias nominales para las entradas cíclicas longitudinal y lateral, respectivamente; y  $\Omega_{nom}$  es la velocidad nominal del rotor principal.

Las derivadas parciales en (2.8) son aproximadas por funciones determinadas mediante expresiones teóricas, las cuales han sido ajustadas experimentalmente [4]. Estas derivadas parciales describen el batimiento de las aspas debido a la velocidad traslacional. El batimiento longitudinal debido al incremento de la velocidad hacia adelante es causado por un incremento de sustentación en el aspa de avance con respecto al aspa que va atrás. Un valor teórico para el batimiento longitudinal en estado estable para un rotor sin barra estabilizadora está dado por:

$$a_1 = \frac{2\mu (4\delta_{col}/3 - \lambda_0)}{1 + 3\mu^2/2} \approx 2\mu (4\delta_{col}/3 - \lambda_0) \quad (2.10)$$

donde  $\delta_{col}$  es la entrada de colectivo,  $\mu$  es la razón de avance y  $\lambda_0$  es la razón de flujo interior. Estas dos últimas son definidas posteriormente y en este caso corresponden a los valores para el rotor principal.

La expresión (2.10) es válida para un rotor balanceable en vuelo estacionario. De esta manera, introduciendo un coeficiente de escalamiento debido al efecto de la barra estabilizadora y linealizando (2.10), se obtiene:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \mu} = 2K_\mu \left( \frac{4\delta_{col}}{3} - \lambda_0 \right) \quad (2.11)$$

Un estimado del coeficiente de escalamiento es obtenido mediante el ajuste del modelo de simulación con la respuesta en estado estable de la entrada cíclica en vuelo hacia adelante. El estimado obtenido en este caso es  $K_\mu = 0.2$ , lo cual dice que la barra estabilizadora reduce la respuesta del batimiento de aspas en estado estable para velocidad hacia adelante por un factor de 5. De (2.10) y por la simetría del rotor, se concluye que las derivadas parciales de (2.8) son iguales en magnitud.

$$\frac{\partial b_1}{\partial \mu_v} = -\frac{\partial a_1}{\partial \mu} \quad (2.12)$$

La velocidad positiva en el eje  $Z$  causa un aumento de sustentación en el aspa de avance, lo cual resulta en un batimiento hacia atrás del rotor; este efecto es capturado por la derivada de estabilidad  $\partial a_1 / \partial \mu_z$ . Un estimado de esta derivada es adaptado para ajustarse al vuelo hacia atrás, y escalado por el mismo coeficiente  $K_\mu$  para reflejar el efecto de la barra estabilizadora:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \mu_z} = K_\mu \frac{16\mu^2}{(1 - \mu^2/2)(8|\mu| + a\sigma)} \text{sign } \mu \approx K_\mu \frac{16\mu^2}{(8|\mu| + a\sigma)} \text{sign } \mu \quad (2.13)$$

donde  $a$  es la pendiente de la curva de la superficie de sustentación y  $\sigma$  es la relación de solidez del aspa. Esta última se define posteriormente.

### 2.2.3. Modelo de la velocidad del rotor, gobernador de velocidad y motor

La dinámica de la velocidad del rotor está descrita por la siguiente ecuación:

$$\dot{\Omega} = \dot{r} + \frac{1}{I_{rot}} [Q_e - Q_{mr} - n_{tr}Q_{tr}] \quad (2.14)$$

donde  $Q_e$  es el torque del motor (positivo en el sentido de las manecillas del reloj),  $Q_{mr}$  es el torque del rotor principal (positivo en contra de las manecillas del reloj),  $Q_{tr}$  es el torque del rotor de cola,  $n_{tr}$  es la relación de engranaje del rotor de cola,  $I_{rot}$  es la inercia rotacional total referente a la velocidad del rotor principal. El torque del motor depende del ajuste de inyección de combustible  $\delta_t$  y la velocidad del rotor. Se supone que la potencia del motor es proporcional al ajuste de inyección de combustible:

$$P_e = P_e^{\text{máx}} \delta_t$$

donde  $0 < \delta_t < 1$ . Entonces el torque está dado por:

$$Q_e = \frac{P_e}{\Omega}$$

La respuesta del torque del motor a los cambios de inyección de combustible puede ser considerada instantánea, dado que los atrasos de tiempo asociados con el consumo de aire, flujo de combustible y combustión, son muy pequeños comparado con las dinámicas del vehículo.

El gobernador de velocidad es modelado como un controlador proporcional-integral, el cual mantiene regulada la velocidad del rotor, cambiando el ajuste de inyección de combustible:

$$\begin{aligned}\delta_t &= K_p (\Omega_c - \Omega) + K_i w_i \\ \dot{w}_i &= \Omega_c - \Omega\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde  $\Omega_c$  es el punto de ajuste de la velocidad del rotor,  $K_p$  y  $K_i$  son las ganancias proporcional e integral, respectivamente. La dinámica de la servoválvula de inyección de combustible es mucho más rápida que las dinámicas de la velocidad del rotor, y no es considerada en el modelo. Un aspecto importante es la condición inicial del integrador del error de la velocidad del rotor. Su valor se estimó como  $w_{i_0} = 0.5135$ .

La inercia rotacional total depende también de la inercia del rotor de cola; sin embargo, su contribución es mucho menor a la del rotor principal. Un estimado de esta inercia, referida a la velocidad del rotor principal, está dada por:

$$I_{rot} = 2.5I_{\beta_{mr}}$$

donde  $I_{\beta_{mr}}$  es la inercia de las aspas del rotor principal.

Cabe resaltar que el gobernador de velocidad actúa como un controlador externo al sistema, el cual no puede ser modificado, ya que fue identificado por los desarrolladores del modelo como se explica en esta subsección.

## 2.2.4. Cálculo de fuerzas y momentos

### Fuerzas y momentos del rotor principal

**Empuje** Para el empuje del rotor principal se supone que el flujo de aire interno es constante y uniforme. La figura 2.3 presenta como el rotor principal genera flujo de aire descendente hacia el cuerpo del helicóptero, el cual afecta la aerodinámica del vehículo e interviene en varias de las ecuaciones posteriores.

La constante de tiempo para el asentamiento del transitorio del flujo interno en vuelo estacionario está dado por:

$$\tau_\lambda = \frac{0.849}{4\lambda_{trim}\Omega_{mr}}$$

donde  $\lambda_{trim}$  es la razón de flujo interior para una condición de equilibrio.

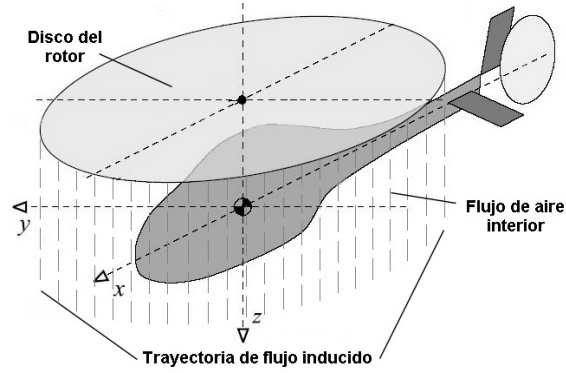


Figura 2.3: Flujo de aire inducido por la dinámica del rotor.

La velocidad inducida por este flujo de aire en vuelo estacionario es determinada como:

$$V_{i_{mr}} = \sqrt{\frac{mg}{2\rho\pi R_{mr}^2}} = 4.2 \text{ m/s}$$

donde  $\rho$  es la densidad del aire, la cual es considerada constante en todo el estudio y es igual a  $1 \text{ kg/m}^3$ .

La velocidad lineal de las aspas del rotor principal es  $V_{mr}^{tip} = \Omega_{mr} R_{mr} = 125.7 \text{ m/s}$ , de lo cual la razón de flujo interior para vuelo estacionario es  $\lambda_{i_{mr}} = V_{i_{mr}}/V_{mr}^{tip} = 0.033$ . El tiempo que toma al flujo interior para establecerse en forma constante es  $\tau_\lambda = 0.038 \text{ s}$ , lo cual es significativamente más rápido que las dinámicas de cuerpo rígido, cuyo asentamiento está en el orden de algunos segundos. De esta manera, las dinámicas del flujo interior no son consideradas. Además, el control cíclico del X-Cell es dominado por la rigidez del centro de torsión, lo cual hace que el modelado de los transitorios del flujo interior sea menos crítico.

En general la relación entre la razón de flujo interior y la velocidad inducida que es producida en un rotor se obtiene como:

$$V_i = \lambda\Omega R$$

Para calcular la fuerza de empuje ( $T_{mr}$ ) que genera el rotor principal es necesario conocer el coeficiente de empuje. Este coeficiente (2.18) es obtenido como una función de la velocidad de vuelo, la velocidad del rotor, la entrada de colectivo y la razón de flujo interior. Para calcular el coeficiente de empuje se hace uso de un esquema iterativo que además resuelve para la razón de flujo interno.

El coeficiente de empuje para un rotor está dado por:

$$C_T = \frac{T}{\rho(\Omega R)^2 \pi R^2} \quad (2.16)$$

donde  $T$  es la fuerza de empuje del rotor que se analiza en el momento: principal o de cola. Entonces, el siguiente sistema de ecuaciones puede ser resuelto iterativamente:

$$\lambda_0 = \frac{C_T}{2\eta_w \sqrt{\mu^2 + (\lambda_0 - \mu_z)^2}} \quad (2.17)$$

$$C_T^{ideal} = \frac{a\sigma}{2} \left( \theta_o \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{2} \right) + \frac{\mu_z - \lambda_0}{2} \right) \quad (2.18)$$

$$C_T = \left\{ \begin{array}{ll} C_T^{ideal} & \text{si} \quad -C_T^{m\acute{a}x} \leq C_T^{ideal} \leq C_T^{m\acute{a}x} \\ -C_T^{m\acute{a}x} & \text{si} \quad C_T^{ideal} < -C_T^{m\acute{a}x} \\ C_T^{m\acute{a}x} & \text{si} \quad C_T^{ideal} > C_T^{m\acute{a}x} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

$$C_T^{m\acute{a}x} = \frac{T_{m\acute{a}x}}{\rho(\Omega R)^2 \pi R^2}$$

En las expresiones anteriores:

$$\mu = \frac{\sqrt{(u - u_{wind})^2 + (v - v_{wind})^2}}{\Omega R} \quad \text{- razón de avance}$$

$$\mu_z = \frac{w - w_{wind}}{\Omega R} \quad \text{- componente normal de la velocidad del flujo de aire}$$

$$\sigma = \frac{2c}{\pi R} \quad \text{- razón de solidez}$$

donde  $a$  es la pendiente de la curva de la superficie de sustentación,  $\eta_w$  es el coeficiente de contracción no ideal de la trayectoria de flujo inducido,  $T^{m\acute{a}x}$  es la máxima fuerza de empuje del rotor,  $c$  es el ancho del aspa y  $\theta_o$  es la entrada de control respectiva; es decir,  $\delta_{col}$  o  $\delta_{ped}$ , dependiendo de si se calcula el coeficiente de empuje del rotor principal o del rotor de cola.

Una aproximación que produce buenos resultados es  $\eta_w = 0.9$ . De esta manera, el esquema iterativo que permite obtener el coeficiente de empuje se plantea como sigue. Primero, se define la función cero:

$$g_0 = \lambda_0 - \frac{C_T}{2\eta_w \Lambda^{1/2}}$$

donde  $\Lambda = \mu^2 + (\lambda_0 - \mu_z)^2$ . Aplicando el esquema iterativo de Newton:

$$\begin{aligned} \lambda_{0_{j+1}} &= \lambda_{0_j} + f_j h_j(\lambda_{0_j}) \\ h_j &= - \left( \frac{g_0}{dg_0/d\lambda_0} \right)_{\lambda_0=\lambda_{0_j}} \end{aligned}$$

Una expresión explícita para  $h_j$  es:

$$h_j = -\frac{(2\eta_w \lambda_{0j} \Lambda^{1/2} - C_T) \Lambda}{2\eta_w \Lambda^{3/2} + \frac{a\sigma}{4} \Lambda - C_T (\mu_z - \lambda_{0j})}$$

Se considera que un buen valor para el coeficiente de la razón de convergencia es  $f_j = 0,6$ .

El número de iteraciones para el esquema de Newton con el que se obtienen resultados adecuados es diez, de acuerdo con el pilotaje del modelo de simulación realizado por el proyecto Colibrí.

**Torque** El torque del rotor principal puede ser aproximado como una suma del torque inducido debido a la fuerza de empuje generada, y el torque debido al perfil de resistencia de las aspas:

$$C_Q = \frac{Q}{\rho (\Omega R)^2 \pi R^3} = C_T (\lambda_0 - \mu_z) + \frac{C_{D_0} \sigma}{8} \left( 1 + \frac{7}{3} \mu^2 \right) \quad (2.20)$$

donde  $C_Q$  es el coeficiente de torque y  $C_{D_0}$  es el coeficiente del perfil de resistencia de las aspas del rotor principal. El momento de guiñada producido por el rotor principal está dado por:

$$Q_{mr} = C_Q \rho (\Omega R)^2 \pi R^3 \quad (2.21)$$

**Momentos del rotor principal** Los momentos dominantes del rotor son los momentos de control producidos por el batimiento del mismo. La figura 2.4 muestra los momentos del rotor actuando sobre el fuselaje.

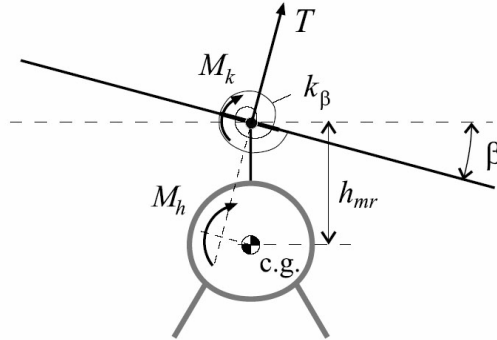


Figura 2.4: Momentos del rotor actuando sobre el fuselaje del helicóptero.

La primera contribución a los momentos resulta de la restricción en la unión del asa con la cabeza del rotor. Ésta puede ser aproximada usando un resorte torsional lineal con un coeficiente de rigidez constante,  $K_\beta$ , resultando en el momento  $M_{k,lat} = K_\beta b_1$ . La segunda contribución resulta de la inclinación del vector de empuje. Suponiendo que el



vector de empuje es perpendicular a la trayectoria del plano superior (TPP), el vector de empuje se inclinará proporcionalmente a los ángulos de batimiento del rotor. El brazo de momento es la distancia,  $h_{mr}$ , entre la cabeza del rotor y el centro de gravedad del helicóptero, resultando en un momento lateral  $M_{h,lat} = Th_{mr}b_1$ . El momento de rodaje total del rotor principal que aparece en las ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido es representado por (2.22):

$$L_{mr} = (K_\beta + Th_{mr})b_1 \quad (2.22)$$

De manera similar, el momento de cabeceo total está dado por (2.23):

$$M_{mr} = (K_\beta + Th_{mr})a_1 \quad (2.23)$$

**Fuerzas del rotor principal** Para una razón de avance pequeña ( $\mu < 0.15$ ), se puede suponer que el vector de empuje es perpendicular a la trayectoria del plano superior (TPP). Los ángulos de batimiento pequeños (menores de 10 grados) permiten usar una aproximación lineal para las componentes de fuerza del rotor principal a lo largo de los ejes fijos al cuerpo del helicóptero. De esta manera, las expresiones para dichas componentes son:

$$\begin{aligned} X_{mr} &= -T_{mr}a_1 \\ Y_{mr} &= T_{mr}b_1 \\ X_{mr} &= -T_{mr} \end{aligned} \quad (2.24)$$

### Fuerzas de fuselaje

En (2.25) se representan las fuerzas de fuselaje para cualquier condición de vuelo. Para vuelo estacionario y bajas velocidades, la velocidad inducida desvía el flujo de aire descendente, provocando una fuerza opuesta al movimiento. Para vuelo a velocidades mayores a la velocidad inducida, el fuselaje puede considerarse como un aspa plana expuesta a presión dinámica.

$$\begin{aligned} V_\infty &= \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + (w_a + V_{i_{mr}})^2} \\ X_{fus} &= -0.5\rho S_x^{fus} u_a V_\infty \\ Y_{fus} &= -0.5\rho S_y^{fus} v_a V_\infty \\ Z_{fus} &= -0.5\rho S_z^{fus} (w_a + V_{i_{mr}}) V_\infty \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $S_x^{fus}$ ,  $S_y^{fus}$  y  $S_z^{fus}$  son las áreas de resistencia efectivas frontal, lateral y vertical,  $u_a$ ,  $v_a$  y  $w_a$  son las velocidades del centro de presión del fuselaje con respecto al aire (esto es,  $u_a = u - u_w$ , donde  $u_w$  es la proyección del vector velocidad del viento sobre el eje  $X$  fijo al cuerpo). Los pequeños momentos generados por el fuselaje son despreciados, ya

que se supone que el centro de presión del fuselaje coincide con el centro de gravedad del helicóptero. Con base en las áreas de proyección del fuselaje, se supone que  $S_y^{fus} \approx 2.2S_x^{fus}$ ,  $S_z^{fus} \approx 1.5S_x^{fus}$ . El área de resistencia frontal se determinó a partir del ángulo de cabeceo promedio requerido para mantener una cierta velocidad hacia adelante. Esta área resultó en el estimado  $S_x^{fus} = 0.1 \text{ m}^2$ .

### Fuerzas y momentos de la aleta vertical

La fuerza lateral producida por la aleta vertical es aproximada por:

$$Y_{vf} = -0.5\rho S_{vf} \left( C_{L\alpha}^{vf} V_\infty^{tr} + |v_{vf}| \right) v_{vf} \quad (2.26)$$

donde  $S_{vf}$  es el área de la aleta vertical,  $C_{L\alpha}^{vf}$  es su pendiente de la curva de sustentación,  $V_\infty^{tr} = \sqrt{u_a^2 + w_{tr}^2}$  es la velocidad axial en la localización del centro de giro del rotor de cola,  $v_{vf}$  es la velocidad relativa al aire en la localización de la aleta vertical,  $w_{tr}$  es la velocidad vertical de la aleta, que es la misma para el rotor de cola.

$$v_{vf} = v_a - \epsilon_{vf}^{tr} V_{itr} - l_{tr} r \quad (2.27)$$

$$w_{tr} = w_a + l_{tr} q - K_\lambda V_{imr} \quad (2.28)$$

En (2.27)  $V_{itr}$  es la velocidad inducida del rotor de cola, la cual es definida posteriormente,  $\epsilon_{vf}^{tr}$  es la fracción de área de la aleta vertical expuesta a la velocidad inducida del rotor de cola,  $l_{tr}$  es la distancia vertical entre el centro de gravedad y el centro de giro del rotor de cola,  $K_\lambda$  es el factor de intensidad de la trayectoria de flujo inducido, también definido posteriormente.

Para tener en cuenta el atascamiento de la aleta vertical, el valor absoluto de la fuerza lateral está limitado por:

$$|Y_{vf}| \leq 0.5\rho S_{vf} \left( (V_\infty^{tr})^2 + v_{vf}^2 \right) \quad (2.29)$$

La fuerza lateral de la aleta vertical crea un momento de guiñada y un pequeño momento de rodaje, debido a los desbalances respecto al centro de gravedad.

$$\begin{aligned} N_{vf} &= -Y_{vf} l_{tr} \\ L_{vf} &= Y_{vf} h_{tr} \end{aligned} \quad (2.30)$$

### Fuerzas y momentos del estabilizador horizontal

La cola horizontal produce sustentación y un momento de cabeceo estabilizante alrededor del centro de gravedad. (2.31) determina la velocidad vertical efectiva en la localización de la cola horizontal, suponiendo que el estabilizador puede estar completamente o parcialmente sumergido en el flujo de aire descendente del rotor principal.

$$w_{ht} = w_a + l_{ht}q - K_\lambda V_{imr} \quad (2.31)$$

El mismo factor de intensidad de la trayectoria de flujo inducido es utilizado tanto para la aleta horizontal como para la vertical y el rotor de cola. La fuerza en  $Z$  generada por el estabilizador horizontal está determinado de acuerdo a:

$$Z_{ht} = 0.5\rho S_{ht} (C_{L_\alpha}^{ht} |u_a| w_{ht} + |w_{ht}|) w_{ht} \quad (2.32)$$

donde  $S_{ht}$  es el área del estabilizador horizontal,  $C_{L_\alpha}^{ht}$  es su pendiente de la curva de sustentación.

Para tener en cuenta el atascamiento del estabilizador horizontal, el valor absoluto de su fuerza de sustentación está limitado por:

$$|Z_{ht}| \leq 0.5\rho S_{ht} (u_a^2 + w_{ht}^2)$$

Finalmente, el momento de cabeceo generado por el estabilizador horizontal es:

$$M_{ht} = Z_{ht}l_{ht} \quad (2.33)$$

### Rotor de cola

El rotor de cola está sujeto a un amplio rango de condiciones de flujo. Esto produce cambios en el cálculo de la fuerza de empuje del rotor de cola. El coeficiente de empuje del rotor de cola es obtenido de la misma forma que el coeficiente de empuje del rotor principal, es decir, usando el algoritmo iterativo presentado al inicio de esta subsección.

El factor de obstrucción de aleta,  $f_t$ , se define como:

$$f_t = 1.0 - \frac{3}{4} \frac{S_{vf}}{\pi R_{tr}^2} \quad (2.34)$$

La fuerza de empuje del rotor de cola es afectada por este factor:

$$Y_{tr} = f_t C_T^{tr} \rho (\Omega_{tr} R_{tr})^2 \pi R_{tr}^2 \quad (2.35)$$

La velocidad del rotor de cola está dado por  $\Omega_{tr} = n_{tr}\Omega_{mr}$ , donde  $n_{tr}$  es la relación de engranaje dado en la tabla del apéndice A.

La trayectoria de flujo inducido del rotor principal afecta el empuje del rotor de cola en forma compleja. Por esto, existe diferencia en el cálculo de la componente del flujo interior normal ( $\mu_z^{tr}$ ) y la razón de avance ( $\mu_{tr}$ ) del rotor de cola, respecto al cálculo realizado para el rotor principal. Sin embargo, una buena aproximación es utilizar la velocidad vertical del rotor de cola (2.28), en el cálculo de la razón de avance ( $\mu_{tr}$ ). Para esto, se debe determinar el factor de intensidad,  $K_\lambda$ , de la trayectoria de flujo inducido del rotor principal mediante el siguiente proceso. Se inicia por calcular las siguientes variables:

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{l_{tr} - R_{mr} - R_{tr}}{h_{tr}} \\ g_f &= \frac{l_{tr} - R_{mr} + R_{tr}}{h_{tr}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

El rotor de cola está fuera del flujo de aire descendente si  $V_{i_{mr}} \leq w_a$ , en cuyo caso, hay un flujo efectivo de aire ascendente. En velocidad hacia adelante, suficientemente baja con respecto al aire, el rotor de cola también está fuera de la trayectoria de flujo inducido. Esto puede ser representado por la condición:

$$\frac{u_a}{V_{i_{mr}} - w_a} \leq g_i$$

En ambos casos  $K_\lambda = 0$ . El rotor de cola está completamente dentro de la trayectoria de flujo inducido si:

$$\frac{u_a}{V_{i_{mr}} - w_a} \geq g_f$$

Se supone que  $K_\lambda = 1.5$  cuando el rotor de cola está totalmente inmerso. En el otro caso, cuando el rotor de cola está parcialmente inmerso, se supone un incremento lineal del factor de intensidad de la trayectoria de flujo inducido con respecto a la velocidad hacia adelante.

$$K_\lambda = 1.5 \frac{\frac{u_a}{V_{i_{mr}} - w_a} - g_i}{g_f - g_i} \quad (2.37)$$

La expresión derivada se utiliza para calcular la componente vertical de la velocidad de vuelo en la localización del rotor de cola, como se muestra en (2.28). Enseguida, se determina la razón de avance para el rotor de cola:

$$\mu_{tr} = \frac{\sqrt{u_a^2 + w_{tr}^2}}{\Omega_{tr} R_{tr}} \quad (2.38)$$

La componente de velocidad normal al rotor de cola está dado por:

$$v_{tr} = v_a - l_{tr}r + h_{tr}p \quad (2.39)$$

y en forma adimensional:

$$\mu_z^{tr} = \frac{v_{tr}}{\Omega_{tr} R_{tr}} \quad (2.40)$$

La magnitud de la fuerza de empuje generada por el rotor de cola está limitada con base en la consideración de un máximo coeficiente de empuje para modelar el atascamiento de las aspas y otras pérdidas viscosas.

$$Y_{\text{máx}}^{tr} = f_t C_{T_{\text{máx}}}^{tr} \rho (\Omega_{tr} R_{tr})^2 \pi R_{tr}^2 \quad (2.41)$$

$$|Y_{tr}| \leq Y_{\text{máx}}^{tr}$$

El momento de guiñada y un pequeño momento de rodaje debido a los desbalances respecto al centro de gravedad, se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} N_{tr} &= -Y_{tr}l_{tr} \\ L_{tr} &= Y_{tr}h_{tr} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Bajo estos planteamientos, el cálculo del coeficiente de empuje,  $C_T^{tr}$ , la razón de flujo interior,  $\lambda_0^{tr}$ , y el torque del rotor de cola,  $Q_{tr}$ , se realiza de la misma forma que en el caso del rotor principal, usando el algoritmo iterativo descrito al inicio de esta sección.

### 2.2.5. Actuadores

Los rangos para las entradas cíclicas y el colectivo son simétricos alrededor del punto central. El comando para el rotor de cola es desplazado por el valor de equilibrio dado en la tabla del apéndice A; entonces, la entrada de los pedales es calculada como:

$$\delta_{ped} = \delta_{ped}^{cmd} + \delta_{ped}^{trim}$$

Así se definen los siguientes comandos máximos de deflexión en radianes, lo cual permite adaptar las entradas del sistema de tal forma que acepten valores en el rango  $[-1,1]$ :

$$\begin{aligned} \delta_{lat}^{\text{máx}} &= 0.096 \\ \delta_{lon}^{\text{máx}} &= 0.096 \\ \delta_{col}^{\text{máx}} &= 0.183 \\ \delta_{ped_{cmd}}^{\text{máx}} &= 0.38 \end{aligned}$$

Se utilizan funciones de transferencia lineal para relacionar los comandos de ancho de pulso de los servomecanismos que controlan las superficies de deflexión. También se usan funciones de transferencia lineales para modelar la dinámica de dichos servos. Se usan servos Futaba S9402 para las deflexiones del colectivo y cíclicas de las aspas del rotor principal y se identificaron, por los desarrolladores del modelo, usando un barrido de frecuencias representativo de la carga mecánica experimentada por los servos durante el vuelo. La función de transferencia resultante es:

$$H_{servo}(s) = \frac{s/T_z + 1}{s/T_p + 1} \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (2.43)$$

donde  $T_z = 104$  s,  $T_p = 33$  s,  $w_n = 36$  rad/s, y  $\zeta = 0.5$ . Un servomecanismo digital más rápido (Futaba S9450) se utilizó para el comando de la entrada de pedales. Como resultado de pruebas, la función de transferencia fue aproximada por un sistema de segundo orden

con la frecuencia natural no amortiguada de 7 Hz y coeficiente de amortiguamiento de 0.6. Esto es:

$$w_n = 2\pi f = 43.98 \text{ rad/s}$$

## 2.3. Modelo de simulación

En esta sección se especifican aspectos importantes para implementar las ecuaciones diferenciales que modelan al mini-helicóptero X-Cell. Estos aspectos son importantes para obtener un modelo de simulación funcional en una amplia variedad de condiciones de vuelo, así como para mejorar la precisión del modelo al aproximar el comportamiento real del sistema.

En el modelo de simulación, las ecuaciones de la cinemática rotacional (2.7) son calculados usando cuaterniones. Los cuaterniones son una alternativa para describir la orientación del vehículo. Esta representación ofrece tres ventajas sobre la representación que utiliza los ángulos de Euler. Primero, (2.7) involucra funciones trigonométricas que tienden a infinito bajo ciertas condiciones, es decir, presentan problemas de singularidades. Segundo, (2.7) dirige a ángulos que pueden caer fuera del rango usual de 0 a 360°. Tercero, las ecuaciones individuales en (2.7) son lineales para  $p$ ,  $q$  y  $r$ , pero son no lineales para los ángulos; lo que involucra algún consumo de tiempo en el procesamiento numérico. Con los cuaterniones es posible expresar una matriz de rotación general en función de cuatro parámetros:  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ .

$$Q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Los cuaterniones se relacionan con los ángulos de Euler a través de las siguientes relaciones, las cuales son útiles para establecer las condiciones iniciales  $q_0^0$ ,  $q_1^0$ ,  $q_2^0$  y  $q_3^0$ .

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ q_1 &= \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ q_2 &= \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ q_3 &= \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Finalmente, las ecuaciones diferenciales lineales que permiten conocer los cuaterniones, y a su vez la matriz de rotación  $Q$ , son:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p & q & r \\ -p & 0 & -r & q \\ -q & r & 0 & -p \\ -r & -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

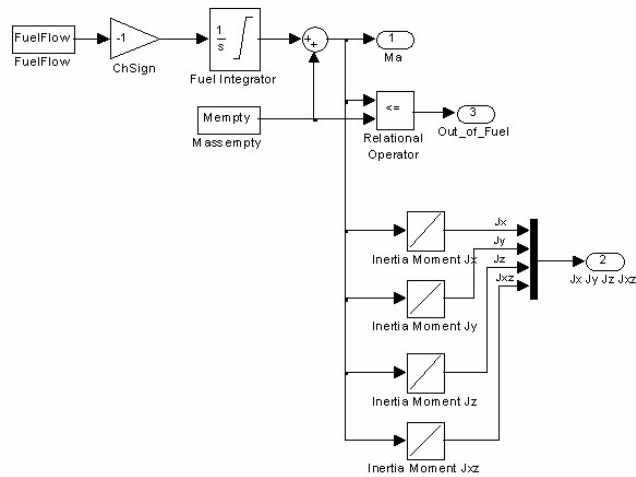


Figura 2.5: Implementación del cambio de masa y momentos de inercia.

De esta manera, ya que los cuaterniones involucran cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, las ecuaciones en (2.3), (2.4), (2.5), (2.8), (2.14), (2.15) y (2.46) constituyen las 17 variables de estado propuestas en [4]. Estas ecuaciones diferenciales de primer orden son implementadas en un modelo de simulación de Matlab/Simulink, los cuales son marcas registradas de The MathWorks, Inc. Las ecuaciones diferenciales se resuelven usando el método de integración Runge-Kutta de cuarto orden, con un paso de integración de 0.01 segundos, tal como es sugerido en [4]. Para la simulación son utilizados varios bloques del AeroSim Blockset, el cual es una librería adicional para Simulink desarrollada por Unmanned Dynamics. Esta librería proporciona componentes para el desarrollo de modelos dinámicos no lineales para aeronaves con seis grados de libertad.

Se considera un consumo de combustible constante, y debido al gasto de combustible, el máximo tiempo de simulación es 900 s. La simulación se detiene cuando el combustible se termina. Existe una entrada externa para el vector de perturbación de viento a lo largo de los ejes fijos al cuerpo.

El gasto de combustible constante es reflejado en la masa total del vehículo, y por lo tanto en los momentos de inercia. El gasto de combustible es implementado con un integrador cuya entrada es el flujo de combustible constante. Con ello, el valor de masa requerido en las ecuaciones de cuerpo rígido (2.3) decrece a razón constante. Para establecer los valores de los momentos de inercia, respecto a los cambios de masa, se utilizan tablas de extrapolación (lookup tables). Ver [23] para mayor información sobre el uso de esta función de Matlab. Además, en el mismo bloque de reducción de masa se implementa una bandera indicadora de término de combustible.

# Capítulo 3

## Control inteligente híbrido difuso y PID

En este capítulo se propone un sistema de control inteligente que combina controladores PID y controladores difusos para un mini-helicóptero X-Cell. A la metodología de combinar la lógica difusa con otras técnicas de control se le conoce como control inteligente híbrido. La sección 3.1 presenta un marco teórico de las técnicas de control utilizadas en el esquema de control propuesto. En la sección 3.2 se hace una descripción detallada de las etapas de diseño, para finalmente, en la sección 3.3 reportar los resultados obtenidos en simulación con la estructura de control propuesta.

### 3.1. Antecedentes

En esta sección se describen las técnicas de control utilizadas en el sistema de control propuesto en el presente capítulo.

#### 3.1.1. Controladores PID

El controlador PID es por mucho el algoritmo de control más común, y existe mucha información donde se describe su diseño y sus aplicaciones. En esta subsección sólo se hace una reseña de las principales características de este tipo de controladores; sin embargo, esta información se puede ampliar consultando [1] y [15].

La mayoría de los lazos de control en la industria son controlados por el algoritmo PID o mediante variaciones del mismo. Es implementado en varias formas distintas: un controlador único, como parte de un banco de controladores o como un sistema de control jerárquico en procesos distribuidos.

La expresión matemática que describe el comportamiento dinámico de un controlador PID es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.1)$$



donde  $u(t)$  es la variable de control y  $e(t)$  es el error de control ( $e(t) = y_{des}(t) - y(t)$ ). De acuerdo a (3.1), la variable de control es una suma de tres términos: el término proporcional, el integral y el derivativo. En este caso, los parámetros del controlador son directamente las ganancias proporcional ( $K_p$ ), integral ( $K_i$ ) y derivativa ( $K_d$ ).

La acción de control proporcional permite acercar a la variable controlada a su valor deseado; sin embargo, esta acción de control no es capaz de eliminar el error de estado estacionario. Para ello se usa la acción de control integral. En el control integral de una planta, el área bajo la curva de la señal de error hasta el momento de análisis es la señal de salida del controlador. A diferencia del control proporcional, la señal de control  $u$  es diferente de cero cuando la señal de error  $e(t)$  es cero. Aunque esta acción de control elimina el error de estado estable, puede conducir a una respuesta oscilatoria de amplitud decreciente lenta, o incluso, de amplitud creciente, y en ambos casos se consideran inconvenientes. Con la acción integral, un error positivo pequeño siempre incrementa la señal de control, y un error negativo genera una señal de control decreciente sin importar que tan pequeño sea el error.

El propósito de la acción derivativa es mejorar la estabilidad al cerrar el lazo de control. La inestabilidad es causada porque toma tiempo el que un cambio en la variable de control se note en la salida del proceso. Consecuentemente, el sistema de control tarda en corregir el error. Bajo esta condición, es muy útil el trabajo de la acción derivativa, ya que responde a las velocidades de cambio del error y produce una corrección antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Por lo tanto, el control derivativo prevé el error, inicia una acción correctiva oportuna y tiende a aumentar la estabilidad del sistema.

Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error de estado estable, añade amortiguamiento al sistema y, por lo tanto, permite el uso de un valor más grande para la ganancia  $K_i$ , lo cual mejora el desempeño en estado estacionario.

### 3.1.2. Controladores difusos tipo Mamdani

La inferencia difusa es el proceso de formular una transformación desde una entrada dada hasta una salida usando lógica difusa. Existen dos tipos de inferencia difusa: tipo Mamdani y tipo Sugeno. Se puede encontrar información sobre ambos tipos de inferencia en [16], y en particular en [20], de donde se tomó la teoría de esta subsección. Además, se puede consultar [11], [14] y [17], donde se aplican las metodologías difusas.

El proceso de inferencia difuso involucra funciones de membresía, operadores difusos y reglas si-entonces. La diferencia entre los dos procesos de inferencia mencionados es la forma del consecuente de cada una de sus reglas; para la inferencia tipo Mamdani el consecuente es un conjunto difuso, mientras que para el tipo Sugeno es una combinación lineal de las variables de entrada o premisas. La inferencia tipo Sugeno da origen a la metodología Takagi-Sugeno, en la cual, el consecuente es un sistema lineal. El proceso de inferencia de Mamdani es la metodología difusa más comúnmente aplicada.

El elemento central del proceso es el motor de inferencia, en el cual se aplican principios de lógica difusa para transformar la implicación que pertenece a un conjunto difuso  $A$  del espacio de entrada  $U$ , a un conjunto difuso  $B$  en el espacio de salida  $V$ . Existen dos formas

de inferir o agregar un conjunto de reglas: inferencia basada en composición e inferencia basada en reglas individuales.

En la agregación basada en composición, todas las reglas se combinan en una sola relación difusa en  $U \times V$  como una única regla si-entonces. En la agregación basada en reglas individuales, cada regla en el conjunto base determina un conjunto difuso, y la salida del motor de inferencia completo es la combinación de los  $M$  conjuntos individuales, donde  $M$  es el número de reglas.

Ya que el motor de inferencia es la parte medular del proceso, siempre se ha buscado eficientar su desempeño, por lo que existen diferentes tipos de motores. Sin embargo, son dos los utilizados más comúnmente:

- Motor de inferencia producto. Este motor utiliza: (i) agregación basada en reglas individuales con operador unión, (ii) implicación producto de Mamdani, (iii) producto algebraico para todos los operadores AND (norma-t) y máximo para todos los operadores OR (norma-s). Matemáticamente el motor de inferencia producto se expresa como:

$$\mu_{B'} = \max_{l=1}^M \left[ \sup_{\mathbf{x} \in U} \left( \mu_{A'}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right) \right] \quad (3.2)$$

esto es, dado un conjunto difuso  $A'$  en  $U$ , el motor de inferencia producto da el conjunto difuso  $B'$  en  $V$  de acuerdo a (3.2).

- Motor de inferencia mínimo. Este motor utiliza: (i) agregación basada en reglas individuales con operador unión, (ii) implicación mínimo de Mamdani, (iii) mínimo para todos los operadores AND (norma-t) y máximo para todos los operadores OR (norma-s). Matemáticamente el motor de inferencia mínimo se expresa como:

$$\mu_{B'} = \max_{l=1}^M \left[ \sup_{\mathbf{x} \in U} \min \left( \mu_{A'}(\mathbf{x}), \mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right) \right] \quad (3.3)$$

En cuanto al proceso de fuzificación el más fácil de usar es el “singleton” o del elemento único, el cual mapea un punto valuado real  $\mathbf{x}^* \in U$  en un único conjunto difuso  $A'$  en  $U$ . Esto se define como:

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.4)$$

La defuzificación se define como el mapeo de un conjunto difuso  $B'$  en  $V$  a un valor único  $y^* \in V$ . Conceptualmente, la tarea de defuzificación es especificar un punto en  $V$  que mejor represente el conjunto difuso  $B'$ . Entre los diferentes métodos de defuzificación los más conocidos son: de centro de gravedad, de promedio de centros y de máximo.

El defuzificador promedio de centros es el más comúnmente utilizado por su simplicidad computacional, ya que es una simplificación del de centro de gravedad (o centroide); sin

embargo, algunas veces es preferible utilizar la precisión del último. El defuzificador de centro de gravedad especifica la salida,  $y^*$ , como el centro del área bajo la función de membresía de  $B'$ , esto es:

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy} \quad (3.5)$$

donde  $\int_V$  es la integral convencional.

Para resumir la teoría expuesta sobre lógica difusa, en la inferencia tipo Mamdani los conjuntos difusos del consecuente de cada regla se combinan a través de operadores de agregación y el conjunto difuso resultante se defuzifica para producir la salida del sistema.

## 3.2. Esquema de control general

Esta sección presenta el esquema de control general que se propone utilizar para el diseño de distintos controladores de vuelo para el mini-helicóptero X-Cell. Se propone un sistema de control que imita las acciones de un piloto al momento de volar el aparato.

Existen varios tipos de modos de control para un helicóptero. Cada modo de control se denomina de acuerdo a las variables de estado que están actuando como salidas. Por ejemplo, para lograr regulación en una localización específica, se usa el modo de control posición y guiñada  $(x, y, z, \psi)$ . En caso de falla de sensores, tal como la ausencia de información de posición desde el sistema de posicionamiento global (GPS por sus siglas en inglés), se utiliza el modo de control altitud y orientación  $(z, \phi, \theta, \psi)$ . Este control se diseña para usarse en la estabilización del vehículo, dado que el sistema de navegación inercial (INS por sus siglas en inglés) aún debe ser capaz de proporcionar información de altitud y orientación para el control. El conjunto de salidas  $x, y, z, \beta$ , constituyen el modo de control posición y ángulo de deslizamiento lateral. En particular, si el sistema de control trata de mantener el ángulo de deslizamiento,  $\beta$ , en cero, se dice que el sistema opera en modo de vuelo coordinado.

El mini-helicóptero X-Cell está equipado con un control remoto para ser usado por un piloto, cuya labor es mantener la orientación deseada para que el vehículo desarrolle la acción de vuelo correspondiente. Se observa cómo un helicóptero, al igual que cualquier tipo de aeronave VTOL, es maniobrado al controlar sus ángulos de orientación. La finalidad del sistema de control es sustituir la acción de un piloto por un control automático, así que considerando lo que el piloto efectúa, se utiliza un modo de control de altitud y orientación. Bajo este razonamiento, es posible mover al helicóptero a un punto específico inclinándolo adecuadamente para que el rotor produzca fuerzas horizontales suficientemente grandes. Mientras mayor sean los ángulos de cabeceo y rodaje, mayor serán las fuerzas de propulsión longitudinal y lateral respectivamente.

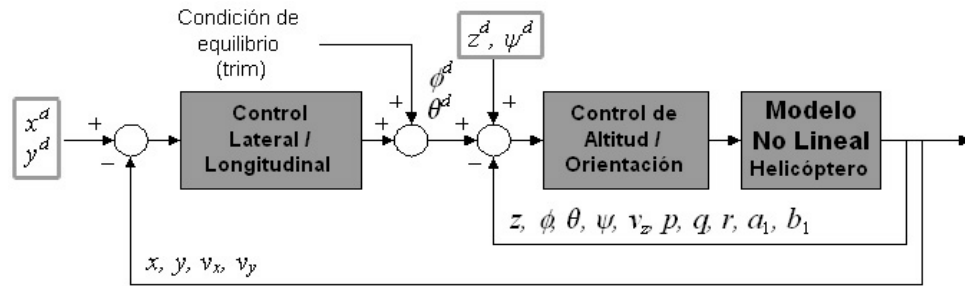


Figura 3.1: Arquitectura de control general con una filosofía cercana a la acción humana.

La figura 3.1 muestra el esquema de control general propuesto en esta tesis, el cual es aplicable para el control de vuelo de cualquier helicóptero. Este esquema está constituido por dos lazos: uno interno y otro externo. El lazo interno controla las dinámicas más rápidas, que son la altitud ( $z$ ) y la orientación ( $\phi, \theta, \psi$ ), mientras que el lazo exterior controla las dinámicas más lentas, que son las traslaciones longitudinal ( $x$ ) y lateral ( $y$ ).

Con base en el esquema de la figura 3.1, se diseñan tres sistemas de control que combinan varias técnicas. La figura resalta las cuatro entradas utilizadas para determinar los valores de referencia deseados para la posición tridimensional y el ángulo de guiñada ( $x^d, y^d, z^d, \psi^d$ ). El control lateral/longitudinal se realiza en todos los casos por controladores difusos, mientras que el control de altitud/orientación, se realiza con controladores PID para el primer esquema, una combinación PID y regulación para el segundo esquema y un controlador no lineal para el tercero de ellos. De acuerdo a la(s) técnica(s) de control utilizada(s) para el controlador de altitud/orientación, el lazo interno requiere más o menos número de variables en realimentación. Por ejemplo, para el primer esquema sólo se requiere  $z, \phi, \theta$  y  $\psi$ , en cambio, para el segundo esquema se debe agregar  $v_z, p, q, r, a_1$  y  $b_1$ .

El proceso de diseño bajo el esquema de control anterior es secuencial, es decir, primero es necesario asegurar el control de orientación, para entonces trabajar el control de traslación.

### 3.3. Diseño del sistema de control

Esta sección presenta el proceso de diseño de un sistema de control basado en el esquema de la sección anterior (figura 3.1). Se propone un sistema de control sencillo y funcional, el cual combina la teoría de control clásico y la lógica difusa. De la teoría de control clásico se hace uso de los controladores PID, mientras que de la lógica difusa se hace uso de los controladores tipo Mamdani.

### 3.3.1. Control de altitud y orientación

Un modo de control de altitud y orientación permite controlar a un helicóptero de manera semejante a un piloto humano. Las dinámicas de orientación son condicionalmente estables; se requiere una cantidad mínima de realimentación de orientación para que el sistema sea estable; sin embargo, una realimentación excesiva desestabiliza al sistema [12].

Se propuso desarrollar un control de altitud y orientación usando controladores PID de una entrada y una salida. Se tienen cuatro controladores PID independientes, uno para cada ángulo de orientación ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) y uno para altitud ( $z$ ).

La función de transferencia considerada para cada controlador PID es como sigue:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

### Sintonización de los controladores PID

El procedimiento de sintonización de los controladores PID es difícil debido al acoplamiento entre las dinámicas del sistema. Los cuatro controladores PID tienen que ser sintonizados simultáneamente para valores de referencia constantes. Como punto de partida para la tarea de sintonización, es suficiente hacer realimentación proporcional en cada uno de los cuatro lazos para estabilizar los ángulos de orientación y para llevar la altitud cerca del valor constante deseado. Se deben ir aumentando las ganancias proporcionales para reducir lo más posible el error de estado estable de cada variable. Con ganancias proporcionales no muy grandes (alrededor de 2), se debe buscar un equilibrio entre el control colectivo y el antitorque; al incrementar un poco la ganancia proporcional del colectivo se debe incrementar mucho la ganancia para pedales.

Con la primera aproximación que utiliza sólo ganancias proporcionales, cada variable controlada tiene un error de estado estacionario, por lo que hay que incluir una parte integral pequeña (alrededor de 0.4) en los controladores. Una parte integral grande desestabiliza totalmente al sistema. A su vez, incluir una parte derivativa pequeña (alrededor de 0.2) beneficia para lograr contrarrestar los efectos de la acción integral, y así obtener una mejor dinámica para cada variable controlada. El controlador para guiñada requiere una ganancia integral mayor que los demás y se debe compensar con una ganancia derivativa grande.

Es necesario considerar el rango máximo aceptado por los actuadores al momento de ajustar las ganancias, con el fin de evitar en lo posible saturación de los servomecanismos. Finalmente, con los valores iniciales mencionados, se sigue un procedimiento de prueba y error que busca las mejores ganancias de acuerdo a la respuesta dinámica deseada. Al terminar la sintonización, cada uno de los controladores tiene componentes proporcional, integral y derivativo, cuyas ganancias se muestran en la tabla 3.1:

Tabla 3.1: Valores de ganancias para cada controlador PID.

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
$z$ PID	3	0.2	0.6
$\phi$ PID	3	0.5	0.2
$\theta$ PID	3	1	0.2
$\psi$ PID	10	1.5	10

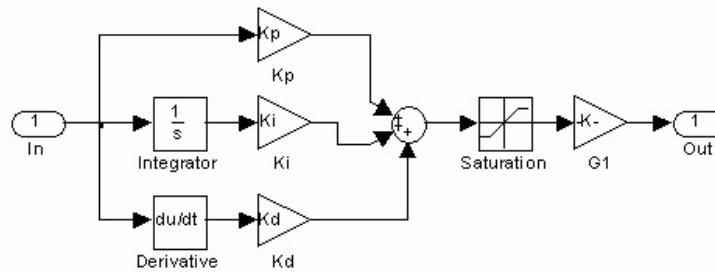


Figura 3.2: Diagrama de implementación de los controladores PID.

### Implementación en simulación de los controladores PID

La implementación de los cuatro controladores PID se realizó en la forma común, solamente que su salida es normalizada para tomar valores en el rango  $[-1, 1]$ . Para acotar las salidas al rango deseado, se utilizan los valores máximos de deflexión en radianes de los actuadores, los cuales son dados en la sección 2.2.5. La figura 3.2 ilustra el diagrama de implementación de los controladores PID.

### 3.3.2. Control lateral y longitudinal

Se utilizan controladores difusos del tipo Mamdani para controlar las posiciones  $x$ ,  $y$ . Este tipo de controladores tienen una naturaleza heurística, la cual refleja la experiencia de un piloto humano.

Una cuestión importante en el diseño de los controladores de Mamdani son las condiciones de equilibrio. La interpretación de condición de equilibrio para una aeronave es definida al inicio del segundo capítulo. La condición de equilibrio no depende de las posiciones, velocidades y guiñada. Como condición de equilibrio se obtienen ocho valores:  $\delta_{col}^T$ ,  $\delta_{lon}^T$ ,  $\delta_{lat}^T$ ,  $\delta_{ped}^T$ ,  $a_1^T$ ,  $b_1^T$ ,  $\phi^T$  y  $\theta^T$ . Para controlar el movimiento traslacional, es importante

conocer la orientación para el equilibrio ( $\phi^T$  y  $\theta^T$ ). Estos valores permiten obtener posiciones lateral y longitudinal constantes.

Para calcular la condición de equilibrio basta considerar las seis ecuaciones diferenciales que determinan la dinámica de cuerpo rígido, ya que en ellas están implícitas las fuerzas y momentos que deben balancearse; además de las dos ecuaciones de la dinámica del rotor, donde aparecen las entradas cíclicas. Se requiere calcular la condición de equilibrio para vuelo estacionario, con lo que se tiene la siguiente información:

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 = [0, 0, 0]^T$$

Es difícil hacer el cálculo de la condición de equilibrio sobre el modelo matemático utilizado, debido al cómputo iterativo de los coeficientes de empuje. Matlab no es capaz de encontrar esta condición con su función “trim”; sin embargo, se propuso encontrar valores adecuados mediante pruebas en simulación, para después ser validados. La condición de equilibrio encontrada por simulación es:

$$\begin{aligned} \delta_{col}^T &= 0.6083, \delta_{lon}^T = 0, \delta_{lat}^T = 0.01902, \delta_{ped}^T = 0.4247, \\ a_1^T &= 0, b_1^T = 0.007667, \phi^T = 0.07988, \theta^T = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

La verificación de los valores anteriores se realiza mediante código de programa desarrollado en Maple, el cual es una marca registrada de Waterloo Maple, Inc. El listado de programa para el cálculo de la condición de equilibrio se muestra en el apéndice B. Esta validación fue posible una vez que se conocieron los valores en que se establecen las razones de flujo interior ( $\lambda_{mr}$  y  $\lambda_{tr}$ ) al desarrollar vuelo estacionario en el modelo de simulación.

Finalmente, utilizando esta condición de equilibrio y el razonamiento de control presentado en el primer capítulo, se diseñan dos controladores de Mamdani para fijar adecuadamente los valores de referencia para los ángulos de rodaje y cabeceo. Ambos controladores son de la forma más simple posible.

Una vez definidos los elementos del sistema de control, la figura 3.3 presenta el diagrama donde se detalla la estructura de tal sistema, donde se combinan la teoría de control clásico y la lógica difusa.

Antes de trabajar el diseño de los controladores difusos se debe tener claro el significado de los signos en cada una de las variables involucradas en el movimiento lateral y longitudinal, lo cual se define en la figura 3.4. Los signos para las posiciones se muestran en la figura, de donde se define que una velocidad longitudinal positiva significa que el helicóptero se mueve hacia adelante y una velocidad lateral positiva significa que se mueve a la izquierda viéndolo de frente. Un ángulo de cabeceo positivo significa que el helicóptero tiene la nariz arriba, en cambio, para un ángulo negativo tiene la nariz abajo. Un ángulo de rodaje positivo significa que el helicóptero se inclina a la izquierda, y un ángulo negativo es una inclinación a la derecha. La inclinación lateral se interpreta viendo el helicóptero de frente.

Estas definiciones de dirección de movimiento y la filosofía de control presentada en el primer capítulo, dan la capacidad de derivar las reglas para el control difuso de forma

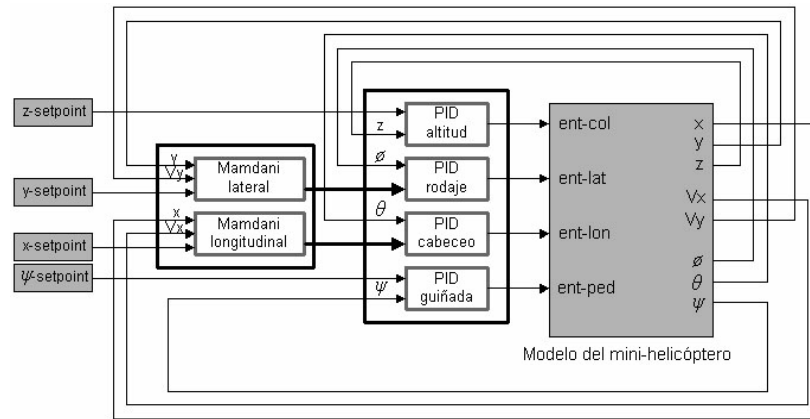


Figura 3.3: Esquema detallado del control inteligente híbrido PID y difuso.

heurística.

### Reglas de Mamdani para posición lateral

Dada una posición lateral de referencia,  $y_d$ , este controlador infiere un ángulo de rodaje deseado,  $\phi_d$ , obtenido a partir del error de posición lateral definido como:  $e_y = y - y_d$ , y de la velocidad de cambio de dicha posición,  $v_y$ . Ambas entradas al controlador se expresan en el sistema de referencia inercial, aunque también se puede usar la velocidad en sistema de referencia fijo al cuerpo. Se prefiere usar ambas entradas en sistema inercial para tener un manejo de variables homogéneo, ya que la posición sólo se dispone en inercial. Las reglas utilizadas para calcular los valores deseados del ángulo de rodaje son de la forma:

**Si**  $e_y$  es NEG y  $v_y$  es NEG, **entonces**  $\phi_d$  es POS\_GR

La interpretación de esta regla en particular es como sigue: si la posición lateral actual es menor que la deseada, y su diferencia tiende a aumentar, es decir, el vehículo se mueve alejándose de la posición deseada, lo cual es causado por un ángulo de rodaje negativo (inclinación a la derecha); entonces, con el fin de regresar la posición actual al valor deseado, se tiene que desacelerar el movimiento lateral e invertir la velocidad. Esto se logra al llevar el ángulo de rodaje de su valor negativo a un valor positivo relativamente grande (inclinación a la izquierda). Por ejemplo, para  $y_d = 0$  las premisas se cumplen cuando  $y$  es negativa y tiende a crecer negativamente (el helicóptero se mueve hacia la derecha viéndolo de frente).

Otro ejemplo de la interpretación de una regla con un par de premisas distintas al caso anterior es:

**Si**  $e_y$  es NEG y  $v_y$  es POS, **entonces**  $\phi_d$  es NEG\_PEQ

Si la posición lateral actual es menor que la deseada, y su diferencia tiende a reducirse debido una velocidad positiva, la cual es causada por un ángulo de rodaje positivo (inclinación a la izquierda); entonces, con el objetivo de mantener la tendencia del movimiento sin que el helicóptero llegue a la posición deseada de forma abrupta, se establece un ángulo



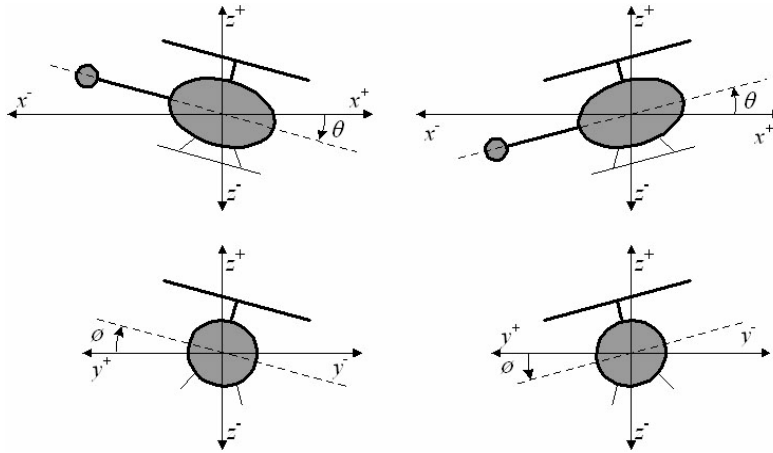


Figura 3.4: Definición de signos para las variables involucradas en el movimiento lateral y longitudinal.

de rodaje negativo pequeño. Este caso se presenta cuando por acciones de control, como la generada por la regla anterior, el helicóptero se acerca rápidamente a la posición deseada y hay necesidad de desacelerarlo por anticipado para evitar que continúe su movimiento. Por ejemplo, para que se siga esta regla cuando  $y_d = 0$ ,  $y$  es negativa y tiende a hacerse menos negativa (el helicóptero se mueve hacia la izquierda viéndolo de frente).

### Reglas de Mamdani para posición longitudinal

Dada una posición longitudinal de referencia,  $x_d$ , este controlador infiere un ángulo de cabeceo deseado,  $\theta_d$ , obtenido a partir del error de posición longitudinal definido como:  $e_x = x - x_d$ , y de la velocidad de cambio de dicha posición,  $v_x$ . Ambas entradas al controlador se expresan en el sistema de referencia inercial, aunque también se puede usar la velocidad en el sistema de referencia fijo al cuerpo. Sin embargo, al igual que en el controlador para posición lateral, por homogeneidad se prefieren ambas variables de entrada inerciales. Las reglas utilizadas para calcular los valores deseados para el ángulo de cabeceo son de la forma:

**Si**  $e_x$  es NEG y  $v_x$  es NEG, **entonces**  $\theta_d$  es NEG\_GR

La interpretación de esta regla es como sigue: si la posición longitudinal actual es menor que la deseada, y su diferencia aumenta, es decir, el vehículo se mueve alejándose de la posición deseada, la cual es causada por un ángulo de cabeceo positivo (nariz hacia arriba); entonces, con el objetivo de regresar la posición actual al valor deseado, se tiene que desacelerar el movimiento longitudinal e invertir la velocidad. Esto se logra al llevar el ángulo de cabeceo de su valor positivo a un valor negativo relativamente grande (nariz hacia abajo). Por ejemplo, para que se cumpla el antecedente de esta regla cuando  $x_d = 0$ ,  $x$  es negativa y se hace cada vez más negativa (el helicóptero se mueve hacia atrás).

Un ejemplo más de la interpretación de una regla, la cual tiene un par de premisas

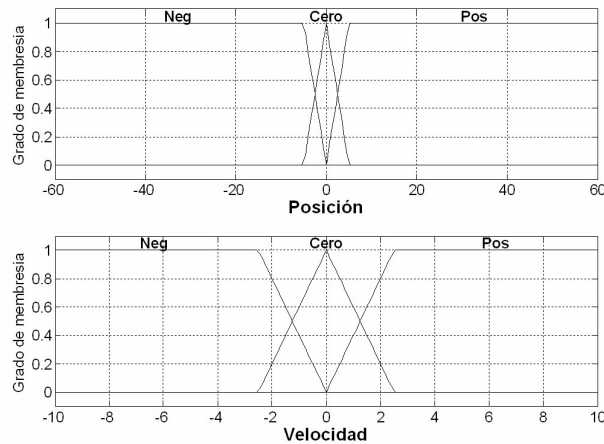


Figura 3.5: Funciones de membresía utilizadas en ambos controladores de Mamdani.

distintas al caso anterior es:

**Si**  $e_x$  es POS y  $v_x$  es NEG, **entonces**  $\theta_d$  es NEG\_PEQ

Si la posición longitudinal actual es mayor que la deseada, y su diferencia tiende a disminuir debido a una velocidad negativa, la cual es causada por un ángulo de cabeceo positivo (nariz hacia arriba); entonces, con el objetivo de mantener la tendencia del movimiento sin que llegue a la posición deseada de forma abrupta, se establece un ángulo de cabeceo negativo pequeño. Este caso se presenta cuando por acciones de control, como la efectuada por la regla anterior, el helicóptero se acerca rápidamente a la posición deseada y hay necesidad de desacelerarlo antes. Por ejemplo, para que aplique esta regla cuando  $x_d = 0$ ,  $x$  es positiva y tiende a disminuir (el helicóptero se mueve hacia atrás).

### Programación de los controladores

Los controladores difusos fueron programados en Matlab. La figura 3.5 muestra las funciones de membresía de entrada utilizadas en ambos controladores de Mamdani, donde se pueden observar los tres valores lingüísticos (negativo, cero y positivo), para cada variable difusa (posición y velocidad). El universo de discurso en metros para la variable posición es  $(-60, 60)$ , y para la variable velocidad en m/s es  $(-10, 10)$ .

Para que los controladores de Mamdani proporcionen la salida deseada, se debe especificar el valor numérico de la salida correspondiente a cada una de las nueve reglas por medio de funciones de membresía, tal como se muestra en la figura 3.6. Cada uno de los conjuntos difusos de salida se asocia con un término lingüístico de la siguiente forma: s1 es negativo grande, s2 es negativo poco grande, s3 es negativo muy pequeño, s4 es negativo pequeño, s5 es cero, s6 es positivo pequeño, s7 es positivo muy pequeño, s8 es positivo poco grande y s9 es positivo grande.

En el apéndice C se incluye el código de los controladores de Mamdani, desde el cual, Simulink genera el código gráfico necesario para su funcionamiento. En este código se

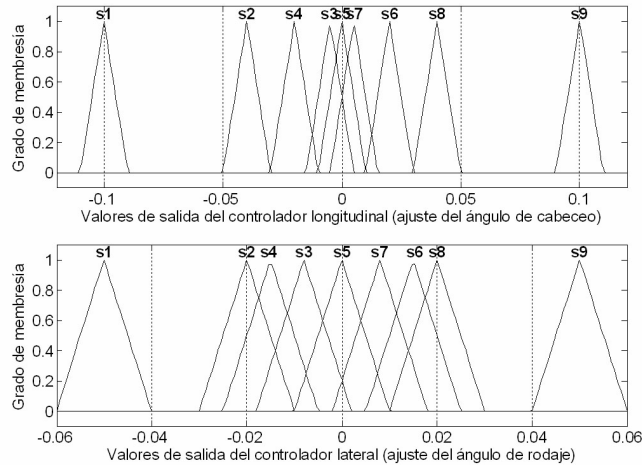


Figura 3.6: Funciones de membresía de salida definidas para cada controlador de Mamdani.

define el uso de las operaciones AND y OR como producto y máximo respectivamente, el proceso de implicación como producto, la agregación de salidas como suma y el método del centroide para la defuzificación. Matlab utiliza por defecto el proceso “singleton” para fuzificación. Ver “Fuzzy Logic Toolbox” en [23], para mayor información.

Para ilustrar la operación de uno de los controladores difusos, se presenta la figura 3.7, donde se observan las nueve reglas ( $3^2 = 9$ ) que resultan de la combinación de las tres funciones de membresía definidas para cada variable de entrada al controlador longitudinal. La figura presenta el caso donde el helicóptero está en una posición 3.5 m atrás de su referencia y se mueve incrementando el error a una velocidad de 1.65 m/s. El controlador infiere que se requiere un ángulo de cabeceo de  $-0.0588$  radianes para hacer regresar al vehículo hacia la posición deseada.

A continuación se enlistan las nueve reglas utilizadas para el controlador de movimiento lateral:

- 1) Si  $e_y$  es **Neg** y  $v_y$  es **Neg**, entonces  $\phi$  es **s9**
- 2) Si  $e_y$  es **Cero** y  $v_y$  es **Neg**, entonces  $\phi$  es **s8**
- 3) Si  $e_y$  es **Pos** y  $v_y$  es **Neg**, entonces  $\phi$  es **s7**
- 4) Si  $e_y$  es **Neg** y  $v_y$  es **Cero**, entonces  $\phi$  es **s6**
- 5) Si  $e_y$  es **Cero** y  $v_y$  es **Cero**, entonces  $\phi$  es **s5**
- 6) Si  $e_y$  es **Pos** y  $v_y$  es **Cero**, entonces  $\phi$  es **s4**
- 7) Si  $e_y$  es **Neg** y  $v_y$  es **Pos**, entonces  $\phi$  es **s3**
- 8) Si  $e_y$  es **Cero** y  $v_y$  es **Pos**, entonces  $\phi$  es **s2**
- 9) Si  $e_y$  es **Pos** y  $v_y$  es **Pos**, entonces  $\phi$  es **s1**

Los valores centrales de las funciones de membresía de salida para el controlador de posición en  $y$  son:

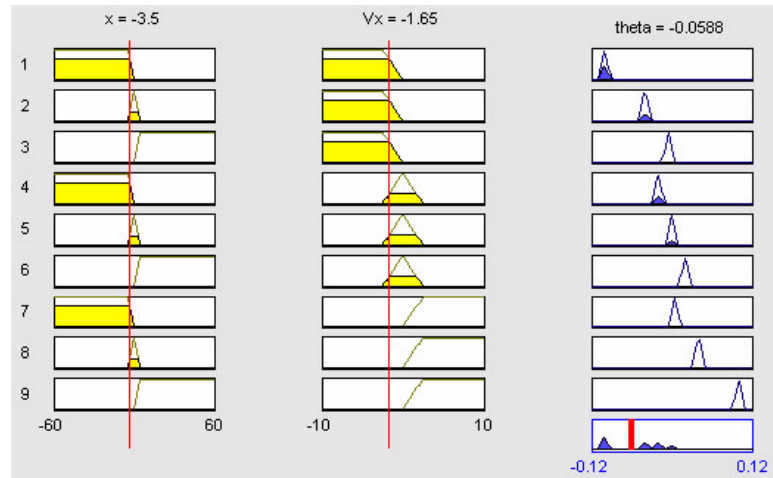


Figura 3.7: Funcionamiento de los controladores de Mamdani con base a sus nueve reglas.

$$\begin{aligned} s1 &= -0.05, s2 = -0.02, s3 = -0.008, s4 = -0.015, s5 = 0, \\ s6 &= 0.015, s7 = 0.008, s8 = 0.02, s9 = 0.05 \end{aligned}$$

Las nueve reglas para el controlador longitudinal son:

- 1) Si  $e_x$  es **Neg** y  $v_x$  es **Neg**, entonces  $\theta$  es **s1**
- 2) Si  $e_x$  es **Cero** y  $v_x$  es **Neg**, entonces  $\theta$  es **s2**
- 3) Si  $e_x$  es **Pos** y  $v_x$  es **Neg**, entonces  $\theta$  es **s3**
- 4) Si  $e_x$  es **Neg** y  $v_x$  es **Cero**, entonces  $\theta$  es **s4**
- 5) Si  $e_x$  es **Cero** y  $v_x$  es **Cero**, entonces  $\theta$  es **s5**
- 6) Si  $e_x$  es **Pos** y  $v_x$  es **Cero**, entonces  $\theta$  es **s6**
- 7) Si  $e_x$  es **Neg** y  $v_x$  es **Pos**, entonces  $\theta$  es **s7**
- 8) Si  $e_x$  es **Cero** y  $v_x$  es **Pos**, entonces  $\theta$  es **s8**
- 9) Si  $e_x$  es **Pos** y  $v_x$  es **Pos**, entonces  $\theta$  es **s9**

Los valores centrales de las funciones de membresía de salida para el controlador de posición en  $x$  son:

$$\begin{aligned} s1 &= -0.1, s2 = -0.04, s3 = -0.005, s4 = -0.02, s5 = 0, \\ s6 &= 0.02, s7 = 0.005, s8 = 0.04, s9 = 0.1 \end{aligned}$$

### 3.4. Resultados

En esta sección se reporta el desempeño del esquema de control propuesto. De inicio, se utilizan solamente los controladores PID. Enseguida, se prueba el sistema de control

completo para vuelo estacionario. Finalmente, se prueba el desempeño de la estructura de control para alcanzar una posición  $x$ - $y$  específica mientras se hace seguimiento de una trayectoria senoidal en altitud. En la mayoría de los resultados se incluye el comportamiento ante perturbaciones de viento. Para algunos ejemplos, se muestran también las señales de entradas que logran dichos comportamientos.

### 3.4.1. Desempeño de los controladores PID

En esta subsección se prueba el desempeño de los controladores de orientación, es decir, el desempeño de los tres controladores PID que llevan a un valor deseado a los ángulos de rodaje ( $\phi$ ), cabeceo ( $\theta$ ) y guiñada ( $\psi$ ). Esto se ilustra mediante el seguimiento de una señal cuadrada para cada uno de estos ángulos. Para ello se realizan tres simulaciones. En la primera, se establece la señal cuadrada como referencia del controlador PID para rodaje. Al mismo tiempo, las referencias para los dos ángulos restantes son cero. En la segunda, la señal cuadrada es la referencia del controlador PID para cabeceo, mientras los otros dos puntos de ajuste se fijan a cero. Finalmente, en la tercera simulación, la señal cuadrada se usa como referencia del controlador PID para guiñada. Los puntos de ajuste restantes también son establecidos en cero.

Las figuras 3.8, 3.9 y 3.10 muestran el resultado del seguimiento de la señal cuadrada para cada uno de los ángulos de orientación. La frecuencia de dicha señal es de 0.025 Hz. Nótese que no se exige un cambio abrupto en el seguimiento desde inicio, sino hasta los cinco segundos. Esto debido a que el sistema no soporta mantenerse en equilibrio si se aplica el cambio durante el transitorio de elevación hacia una altitud deseada. Se debe esperar a que el sistema prácticamente esté en equilibrio para entonces requerir el seguimiento. El punto de ajuste para altitud es establecido en 20 m; sin embargo, el desempeño del controlador de altitud se muestra posteriormente.

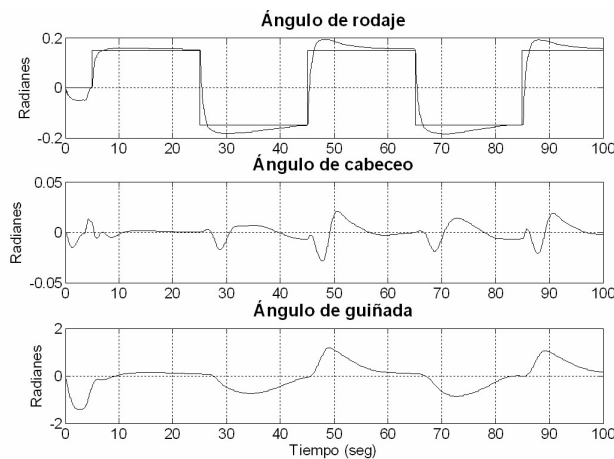


Figura 3.8: Seguimiento de trayectoria para el ángulo de rodaje.

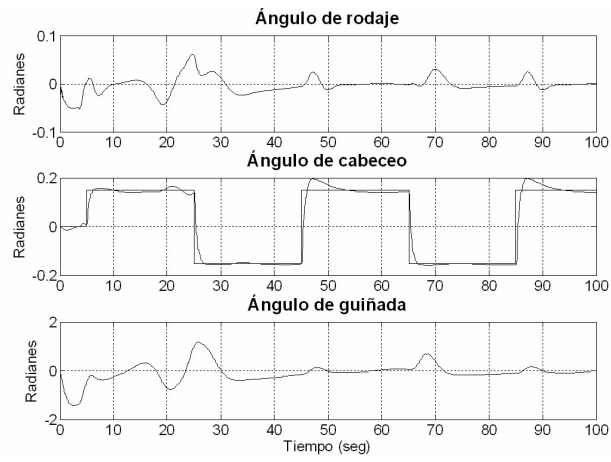


Figura 3.9: Seguimiento de trayectoria para el ángulo de cabeceo.

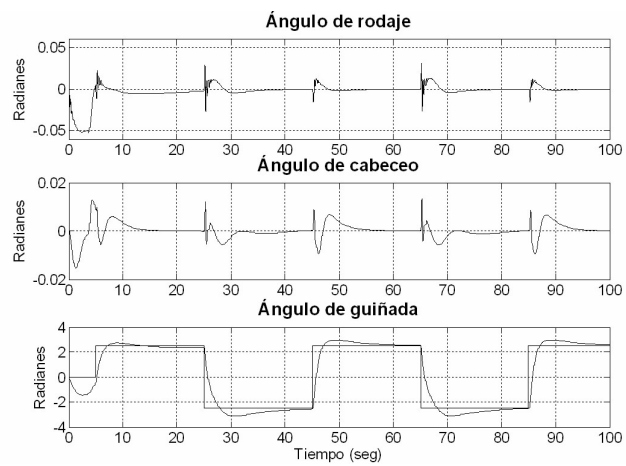


Figura 3.10: Seguimiento de trayectoria para el ángulo de guiñada.

De acuerdo a las gráficas, los controladores de orientación presentan buena velocidad de respuesta y poco sobrepaso. Sin embargo, a partir de las mismas figuras del seguimiento para cada ángulo, es notable la presencia de los acoplamientos entre dinámicas; en cada caso, los dos ángulos cuya referencia es cero no pueden mantenerse en este valor al hacer cambios abruptos en el que sigue la señal cuadrada. La figura 3.11 ilustra como las entradas cíclicas reaccionan a los cambios rápidos de la entrada de pedales al hacer el seguimiento de guiñada de la figura 3.10.

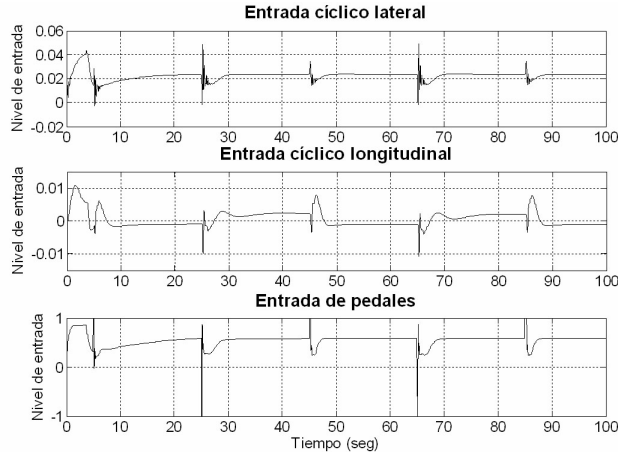


Figura 3.11: Entradas de control para lograr el seguimiento para el ángulo de guiñada.

Nótese que el seguimiento no se logra para los tres ángulos de forma simultánea debido a los acoplamientos ya mencionados.

Para mostrar el desempeño en conjunto de los cuatro controladores PID que integran el control de altitud y orientación, se experimenta haciendo que cada uno de los ángulos de orientación tenga cero como referencia. El punto de referencia del controlador de altitud se establece en 20 m. Además, a los 50 segundos se aplica una señal de ruido blanco que actúa como perturbación de viento. El valor máximo de esta señal de ruido es la unidad, lo cual representa una velocidad de viento de 1 m/s. Los valores del ruido se mantienen durante medio segundo, esto es, su periodo de muestreo es de 0.5 s.

La figura 3.12 presenta cómo cada uno de los ángulos de orientación alcanzan su referencia cero y se mantienen muy cerca de ella independientemente de la presencia de la perturbación.

La figura 3.13 muestra la dinámica de la posición inercial para cada uno de los ejes coordenados. Esta dinámica es la obtenida bajo la condición de control de orientación y altitud descrita; es decir, estabilización de los ángulos de orientación. Se observa como la posición  $z$  alcanza rápidamente su referencia de 20 m con un buen transitorio. Sin embargo, las posiciones longitudinal y lateral divergen. La primera tiende a establecerse en un valor constante y la segunda siempre se aleja de su valor inicial. Esto es de esperarse al tener cero en los ángulos de orientación, lo cual no corresponde a su condición de equilibrio (en particular para el ángulo de rodaje).

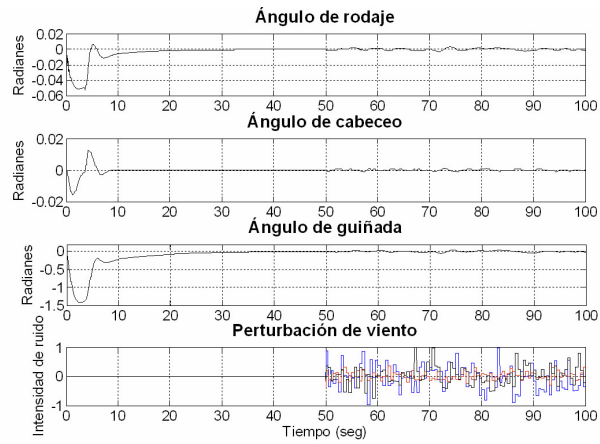
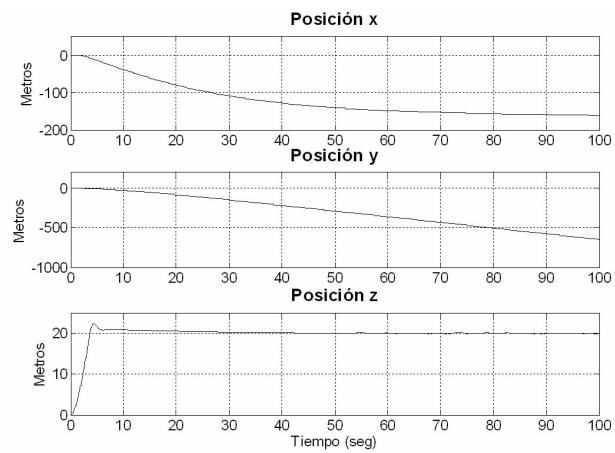


Figura 3.12: Estabilización de los ángulos de orientación.

Figura 3.13: Posiciones  $x$  y  $y$  sin control y seguimiento constante en  $z$ .



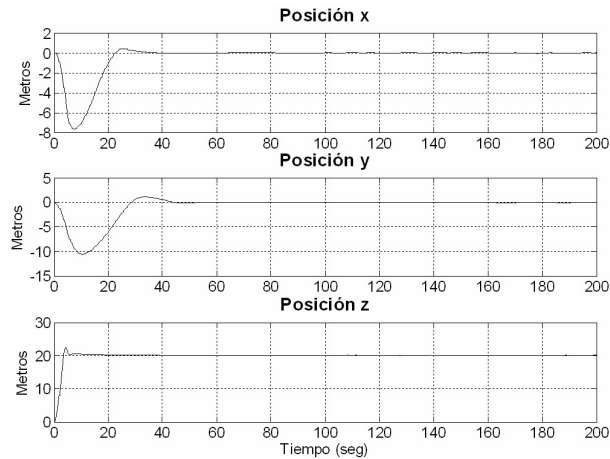


Figura 3.14: Estabilización de la posición inercial.

### 3.4.2. Desempeño de los controladores difusos

En esta subsección se presenta el desempeño del esquema de control completo. Para estas pruebas se incluyen los controladores de Mamdani, cuya labor es establecer los puntos de ajuste adecuados para los ángulos de cabeceo y rodaje; de tal forma que se evite lo ocurrido en la figura 3.13 con las posiciones longitudinal y lateral.

La figura 3.14 despliega la dinámica de la posición inercial en cada eje coordenado, para puntos de ajuste cero en la posición longitudinal y lateral. De la misma forma que en la subsección anterior, la altitud alcanza su referencia constante de 20 m, mientras que las posiciones  $x$  y  $y$  regresan a cero después de un transitorio aceptable. Esto se logra porque los ángulos de orientación se establecen en su condición de equilibrio: 0.07988 para rodaje y 0 para cabeceo, como lo muestra la figura 3.15.

Dada la condición de estabilización de la posición y de los ángulos de orientación, se asegura que el mini-helicóptero está desarrollando vuelo estacionario.

En la figura 3.16 se observan las señales de entrada requeridas para lograr la condición de vuelo estacionario, independientemente de la presencia de perturbaciones de viento.

### 3.4.3. Seguimiento de trayectoria en posición

En esta subsección se pone a prueba el desempeño del sistema de control completo. Esto se logra mediante el seguimiento de una referencia para cada una de las posiciones. La figura 3.17 muestra la dinámica de la posición inercial para el seguimiento de una constante en la posición longitudinal y lateral, así como el seguimiento de una señal senoidal en altitud. La altitud oscila alrededor de 20 m con una amplitud de 15 m y a una frecuencia angular de 0.1 rad/s. Esta frecuencia angular corresponde a aproximadamente un ciclo por minuto. Las referencias constantes son  $-8$  m y 5 m para las posiciones  $x$  y  $y$  respectivamente. Se observa un buen desempeño para el movimiento vertical ( $z$ ) y

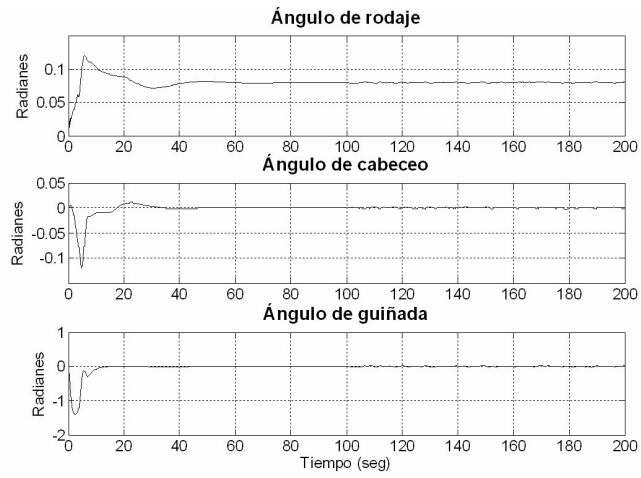


Figura 3.15: Ángulos de orientación para la estabilización de la posición.

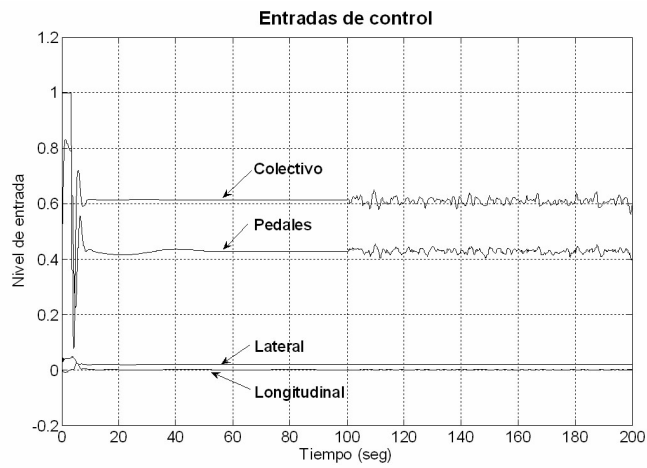


Figura 3.16: Entradas de control para alcanzar la condición de vuelo estacionario.

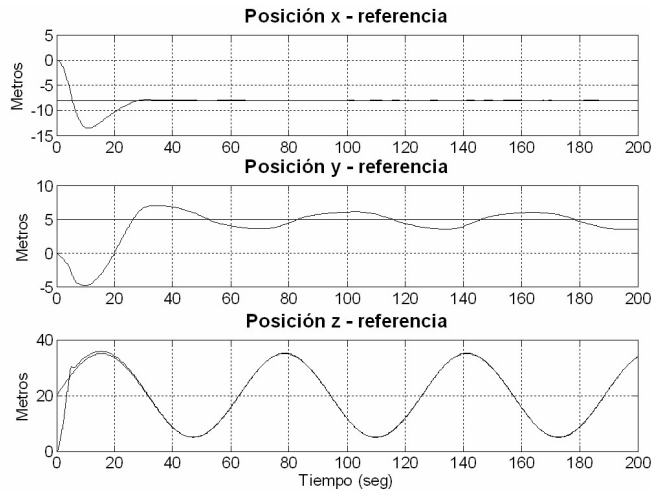


Figura 3.17: Seguimiento de trayectoria para cada posición.

longitudinal ( $x$ ); sin embargo, la posición lateral oscila significativamente alrededor de su referencia. Uno de los acoplamientos más fuertes en el sistema se pone de manifiesto en este comportamiento: la entrada de colectivo modifica el comportamiento del movimiento lateral, debido al efecto secundario del empuje generado por el rotor de cola.

En la figura 3.18 se muestra la dinámica de los ángulos de orientación con los cuales se logra la condición previa de seguimiento en posición. Se observa como los ángulos de cabeceo y rodaje oscilan alrededor de su valor de equilibrio tratando de mantener constante la posición respectiva, la cual es afectada por la entrada de colectivo. En este caso es donde se evidencia el otro acoplamiento más fuerte en el sistema: la entrada de colectivo altera el comportamiento del ángulo de guiñada, lo que a su vez modifica la posición lateral.

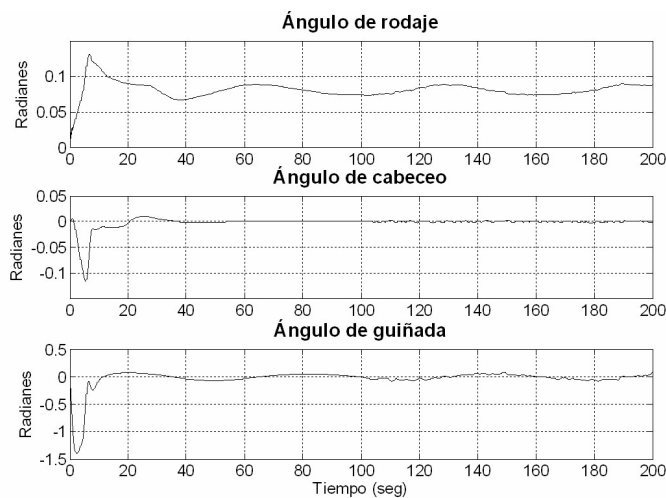


Figura 3.18: Ángulos de orientación para lograr seguimiento en cada posición.

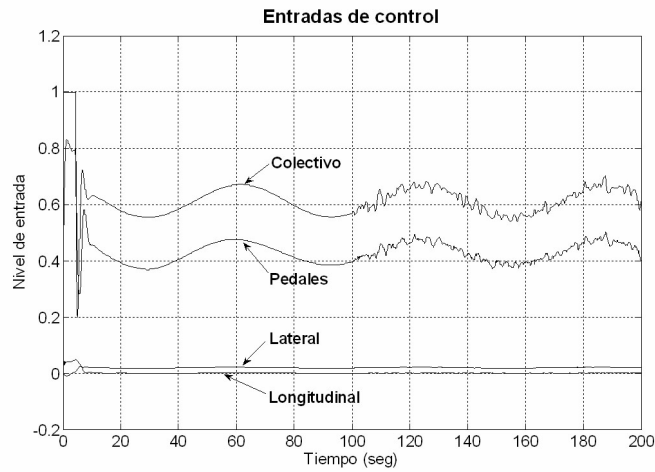


Figura 3.19: Entradas de control para lograr seguimiento en cada posición.

La figura 3.19 presenta las señales de entrada requeridas para lograr la condición de seguimiento en cada posición. Se muestra como las entradas reaccionan ante la presencia de la perturbación de viento.

Nótese que el ángulo de guiñada siempre debe ser cero; de lo contrario, al alejarse demasiado de este valor, los controladores de Mamdani no son capaces de realizar su labor correctamente.

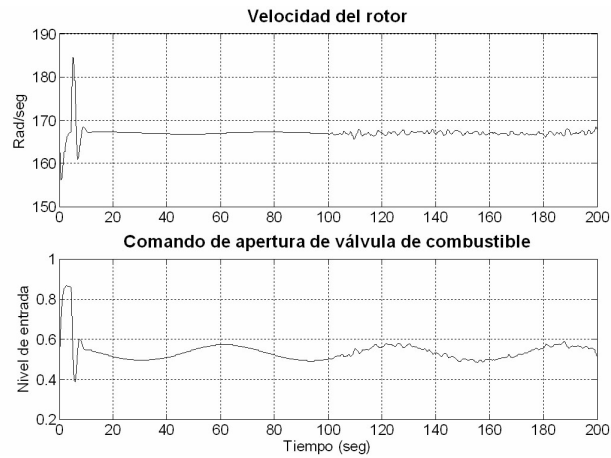


Figura 3.20: Velocidad del rotor y su entrada de control para la condición de seguimiento de trayectoria en posición.

La figura 4.1 muestra como la velocidad del rotor tiene un fuerte transitorio al inicio y posteriormente se mantiene muy cerca de su valor nominal, que son 167 rad/s. Se observa la entrada de la válvula de apertura que logra esta condición de control de velocidad.

### 3.4.4. Comparación con trabajos previos

En general, el sistema de control propuesto en este capítulo es sencillo y de rápida implementación en tiempo real. De forma similar al trabajo de Mettler [12], el sistema de control completo constituye un sistema de posicionamiento en el espacio. La plataforma de investigación de dicho trabajo es un mini-helicóptero R-50, el cual es de mayor tamaño y menos maniobrable que el X-Cell. A diferencia del trabajo presente, el sistema de control consiste sólo de controladores proporcionales y PD. Además, se prueba sobre un modelo matemático lineal, estrictamente válido en vuelo estacionario. En [12] sólo se reportan algunos resultados en el control de posición lateral y longitudinal, donde se observa una buena rapidez en estas dinámicas.

Un punto de comparación importante del sistema de control propuesto en esta tesis son los controladores de Mamdani. El trabajo reportado por Sugeno en [19] también utiliza dos controladores de Mamdani que regulan el movimiento lateral y longitudinal. Los diseñados en esta tesis son más sencillos; 9 reglas para cada controlador a diferencia de las 25 propuestas por Sugeno. Además, en dicho trabajo se utiliza aceleración y velocidad como entradas a los controladores a diferencia de velocidad y posición que se propone en esta tesis. Una ventaja del trabajo de Sugeno es que el controlador difuso para guiñada permite manipular este ángulo de orientación al momento de hacer una vuelta, sin provocar problemas con los controladores lateral y longitudinal.

Sugeno implementa un controlador de Mamdani para compensar los problemas de acoplamiento entre dinámicas, lo que en el presente trabajo no se aborda en ningún caso. El desempeño del sistema de control propuesto por Sugeno se muestra mediante el seguimiento de una trayectoria circular de referencia en el plano  $x - y$ , el posicionamiento a una velocidad deseada y la navegación en el espacio tridimensional. Se implementa en tiempo real con un mini-helicóptero R-50.

Cabe resaltar que a pesar de que la principal aplicación de los controladores PID no es el seguimiento de trayectorias, en esta tesis se prueba su eficacia en la reducción y eliminación del error, aún ante referencias no constantes.

# Capítulo 4

## Control inteligente híbrido difuso, PID y regulación

En este capítulo se propone un sistema de control inteligente que combina controladores PID, controladores difusos y un regulador lineal multivariable. La sección 4.1 presenta los fundamentos teóricos de la técnica de control agregada a este nuevo esquema de control: regulación. En la sección 4.2 se hace una descripción detallada de las etapas de diseño, desde la linealización del sistema hasta el diseño del regulador lineal. Para concluir, la sección 4.3 reporta los resultados obtenidos en simulación utilizando el esquema de control propuesto.

### 4.1. Antecedentes

En esta sección se introducen las bases de la teoría del regulador lineal, la cual se utiliza en el sistema de control propuesto en el presente capítulo.

#### 4.1.1. Teoría del regulador lineal

El problema de controlar un sistema lineal multivariable de forma que su salida siga asintóticamente una referencia es un problema importante en la teoría de control. Al respecto se puede citar a B. Francis, quien planteó su solución en [2]. En [13] se pueden encontrar las demostraciones de los teoremas que sustentan esta teoría. Algunas aplicaciones donde se combina la teoría del regulador lineal con lógica difusa son [3] y [11].

En general, el problema de regulación consiste en encontrar un controlador por realimentación del estado, o del error, tal que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable y el error de seguimiento tienda a cero cuando la planta es influenciada por una señal de referencia y/o perturbación, ambas generadas por un sistema externo denominado exosistema.

Sea una planta modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden e invariantes en el tiempo, de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $u(t)$  denota la acción de control,  $y(t)$  denota la salida a ser controlada y  $x(t)$  es el vector de estados. Se plantea el problema de encontrar para cada función de salida de referencia  $y_{ref}(\cdot)$  en una familia específica, una ley de control  $u(t)$  tal que la respuesta correspondiente  $y(\cdot)$  de la planta satisfaga:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_{ref}(t)\| = 0$$

para cualquier estado inicial  $x(0)$ .

En muchas situaciones prácticas, la respuesta de la planta es afectada no sólo por la entrada  $u(t)$ , sino también por otras entradas exógenas. Si  $w_{per}$  denota el valor de una perturbación de entrada, una planta con perturbaciones se puede modelar por (4.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw_{per}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Ew_{per}(t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Aumentando este sistema para incluir las señales de referencia, se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{per}(t) \\ w_{ref}(t) \end{bmatrix} \\ e(t) &= Cx(t) + \begin{bmatrix} E & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{per}(t) \\ w_{ref}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde  $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$ .

El sistema anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + P\tilde{w}(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Q\tilde{w}(t)\end{aligned}\tag{4.4}$$

donde  $P = \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} E & -R \end{bmatrix}$ , y  $\tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} w_{per}(t) \\ w_{ref}(t) \end{bmatrix}$ .

La primera ecuación de este sistema describe una planta con estado  $x(t) \in R^n$ , con entrada de control  $u(t) \in R^m$  y sujeto a un conjunto de variables de entrada exógenas  $\tilde{w}(t) \in R^q$ , las cuales incluyen perturbaciones (a ser rechazadas) y/o referencias (a ser seguidas). La segunda ecuación define una variable de error  $e(t) \in R^p$ , que se expresa como una combinación lineal del estado de la planta,  $x$ , y de las entradas exógenas,  $\tilde{w}$ .

El problema de que en el sistema (4.4)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , puede ser enunciado formalmente como sigue. Dadas  $A, B, C, P, Q, S$ , encontrar, si es posible, dos matrices  $K$  y  $L$  tales que:

- La matriz  $A + BK$  tenga sus valores propios en el semiplano complejo negativo.
- Para cada  $(x^0, \tilde{w}^0)$ , la solución  $(x(t), \tilde{w}(t))$  de

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (P + BL)\tilde{w}(t) \quad (4.5)$$

$$\dot{\tilde{w}}(t) = S\tilde{w}(t) \quad (4.6)$$

satisfaciendo  $(x(0), \tilde{w}(0)) = (x^0, \tilde{w}^0)$ , sea tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Cx(t) + Q\tilde{w}(t)) = 0$$

La solución al problema anterior se establece en el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [13].

**Teorema 1** *Supóngase que se satisfacen las siguientes hipótesis:*

**(H1)** *El exosistema (4.6) es antiestable; esto es, todos los valores propios de  $S$  no tienen parte real negativa.*

**(H2)** *El par  $(A, B)$  es estabilizable; es decir, existe una matriz  $K$  tal que la matriz  $(A + BK)$  tiene sus valores propios en el semiplano complejo negativo.*

*Entonces el problema de regulación de la salida por realimentación del estado tiene solución si y sólo si existen matrices  $\Pi$  y  $\Gamma$  que resuelven las ecuaciones lineales matriciales:*

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por lo tanto la ley de control para el sistema (4.4) está dada por:

$$u = Kx(t) + L\tilde{w}(t) \quad (4.8)$$

con  $K$  cualquier matriz tal que  $(A + BK)$  sea estable y  $L = (\Gamma - K\Pi)$ . La matriz  $K$  se puede diseñar con cualquiera de las técnicas existentes en la teoría de sistemas lineales [9].

## 4.2. Diseño del sistema de control

Esta sección presenta el proceso de diseño de un nuevo sistema de control para el mini-helicóptero X-Cell. El esquema de control hace uso de una parte del controlador propuesto en el tercer capítulo. Además de la teoría de control clásico y la lógica difusa, el diseño incluye la teoría de regulación en su caso lineal.



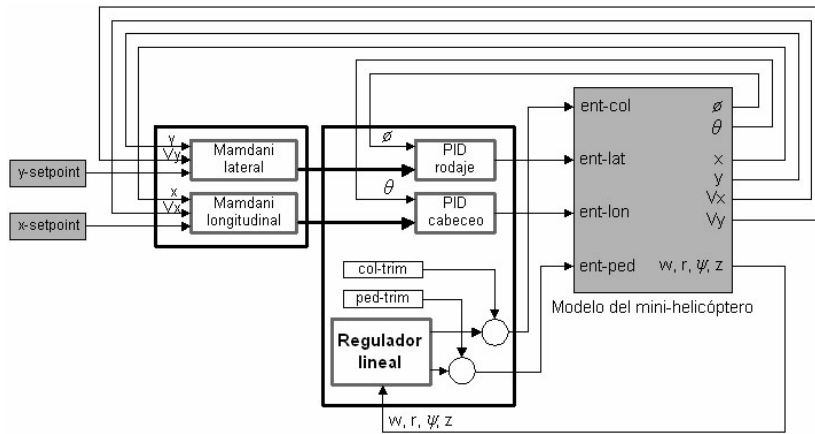


Figura 4.1: Esquema detallado del control inteligente híbrido PID, difuso y regulación.

El esquema de control general se mantiene tal como se ilustró en la figura 3.1; se continúa con la estrategia de control enunciada en el primer capítulo. Sin embargo, buscando eficientar la tarea de seguimiento de trayectoria, se integra la teoría de regulación en el sistema de control.

La teoría de regulación exige el conocimiento previo de las referencias a seguir, ya que con esta información es posible modelar un exosistema capaz de generar dichas señales de referencia. Mantener la estructura de control propuesta significa conservar los dos controladores de Mamdani que establecen los puntos de ajuste para la etapa posterior, la cual es constituida por el control de dinámicas rápidas. Estos controladores difusos, al desempeñar dicha tarea, generan referencias no conocidas. De esta manera, no es posible sustituir los cuatro controladores PID por un único regulador MIMO.

La figura 4.1 presenta el nuevo esquema propuesto, el cual sustituye dos de los controladores PID utilizados bajo la estructura del capítulo anterior. Los controladores para altitud y ángulo de guiñada son reemplazados por un regulador lineal de dos entradas y dos salidas.

Además del trabajo necesario para diseñar un regulador lineal, en este nuevo esquema de control se requiere conocer el valor de las entradas colectivo y pedales que llevan al sistema al equilibrio. Estos valores se conocen a partir de simulaciones y fueron presentados en el capítulo anterior. Los controladores de Mamdani y los controladores PID que aparecen en la figura 4.1, son los mismos que los diseñados para el esquema de control del capítulo 3.

#### 4.2.1. Linealización de la planta

Con el objetivo de probar la nueva estructura de control bajo condiciones similares a las mostradas en el capítulo anterior, se define el punto de operación para linealización del sistema en el modo de vuelo estacionario como sigue:

$$\begin{aligned}
u &= 0; v = 0; w = 0 \\
p &= 0; q = 0; r = 0 \\
\phi &= 0.07988; \theta = 0; \psi = 0 \\
x &= 0; y = 0; z = 20 \\
a_1 &= 0; b_1 = 0.007667 \\
\delta_{col} &= 0.6083; \delta_{lon} = 0; \delta_{lat} = 0.01902; \delta_{ped} = 0.4247
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Este punto de operación representa también un punto de equilibrio del sistema. Los valores mostrados corresponden a los presentados en (3.6), además de incluir velocidades lineales y angulares cero debidas a la condición de vuelo estacionario.

Existen dos alternativas para linealizar un sistema: una linealización analítica o una linealización computarizada mediante un programa adecuado. En el presente caso de estudio, una linealización analítica resulta complicada debido al alto orden del sistema; pero más aún, debido a la presencia de lazos de iteración, donde se calculan los valores de parámetros como la razón de flujo interior y el coeficiente de empuje. Si estos parámetros fueran conocidos de antemano como una función del estado, el trabajo de linealización analítica sería posible. Entonces, la opción viable es el uso de las funciones que ofrece Matlab para obtener la representación matricial en variables de estado de un sistema no lineal para un punto de operación especificado.

Para usar Matlab en la tarea de linealización se requiere contar con un sistema adaptado para ello. La adaptación del sistema consiste en mantener sólo las dinámicas de interés. Esto es, no deben existir integradores cuya salida no requiera ser considerada como una variable de estado. Este caso corresponde específicamente a cuatro modificaciones necesarias, referentes a:

1) Actuadores. La respuesta de los actuadores se considera instantánea, por lo que los actuadores se representan sólo por una ganancia estática. Si se mantuvieran las funciones de transferencia lineales que representan la dinámica de los actuadores, el sistema linealizado incluiría tantas variables de estado innecesarias como el orden de dichas funciones de transferencia.

2) Masa. Se considera constante, por lo que los momentos de inercia tampoco cambian.

3) Transformación entre sistemas de referencia. Se implementan directamente (2.5) y (2.7), sin utilizar la opción alternativa de los cuaterniones. Si en la tarea de linealización se utilizaran los cuaterniones, se perdería el sentido físico de algunas variables.

4) Velocidad del rotor. Se considera constante, por lo que se elimina el gobernador de esta velocidad. Además, esta simplificación implica eliminar el cálculo de los torques de ambos rotores, ya que se utilizan sólo para obtener la dinámica de la velocidad del rotor principal, que no existe para la linealización.

Con estas consideraciones se tiene un sistema simplificado de catorce variables de estado: tres velocidades lineales en sistema de referencia fijo al cuerpo, tres velocidades angulares, tres ángulos de orientación, tres posiciones inerciales y dos ángulos de batimiento del rotor. Además de las reducciones anteriores, se debe dejar un modelo limpio de elementos

adicionales a las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en el modelo para prueba es útil contar con una bandera de detección de altitud cero. Sin embargo, para linealización, debe ser eliminada.

Para que el sistema simplificado pueda ser linealizado, es necesario realizar sobre él una serie de cambios en las propiedades de algunos bloques de Simulink. Por ejemplo, en todos los saturadores se debe seleccionar la opción de tratar como ganancia al linealizar, y en las memorias no debe seleccionarse la opción de paso directo durante la linealización.

Una vez simplificado el modelo en Matlab, existen dos opciones para linealizar un sistema, y ambas proporcionan el mismo resultado final. Una de ellas es utilizar la interfase de usuario gráfica para análisis lineal y la otra es utilizar la función “linmod” desde la línea de comandos. En el apéndice C se detalla el listado del código utilizado para la linealización usando la función “linmod”. Esta opción ofrece la ventaja de obtener los resultados directamente sobre el espacio de trabajo. Dicha función se utiliza en su forma estándar, es decir, con un método de linealización analítico bloque a bloque. Consultar la sección “Simulink Control Design” de [23] para conocer los detalles sobre el proceso de linealización con Matlab.

Como resultado de la linealización del sistema se obtiene una matriz  $A \in M^{14 \times 14}$  de rango diez, por lo que existen cuatro polos del sistema ubicados en el origen del espacio de estados, además de un polo inestable:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \\ \lambda_5, \lambda_6 &= -4.1756 \pm 13.9633i \\ \lambda_7, \lambda_8 &= -4.1795 \pm 19.5635i \\ \lambda_9, \lambda_{10} &= -0.0141 \pm 0.1681i \\ \lambda_{11} &= -0.2230 \\ \lambda_{12} &= -0.7991 \\ \lambda_{13} &= -0.8296 \\ \lambda_{14} &= 0.1269\end{aligned}$$

La matriz  $B \in M^{14 \times 4}$  es de rango pleno por columnas. Al realizar la prueba directa de controlabilidad usando Matlab, se obtiene un resultado desafortunado. Sin embargo, se debe a problemas numéricos, ya que en realidad las primeras catorce columnas de la matriz de controlabilidad son linealmente independientes. Esto se comprueba con el mismo Matlab, usando los comandos incluidos en el código de linealización mostrado en el apéndice C. Adicionalmente, la prueba PBH de rango resultan en que  $\text{rango}([sI - A \ B]) = 14$  para toda  $s$ .

Nótese que las matrices resultantes son independientes de la posición inercial del sistema. Esto es, para cualquier posición tridimensional  $x, y, z$  la linealización del sistema es siempre la misma. Esta importante característica determina la posibilidad de lograr seguimiento de trayectorias para altitud haciendo uso de un único modelo lineal, lo que evita el uso de una técnica de combinación de controladores, tal como Takagi-Sugeno, para conseguir dicho fin.

### Sistema lineal reducido

Para realizar el diseño del regulador lineal requerido bajo el esquema de control mostrado en la figura 4.1, se debe obtener un modelo lineal reducido donde sólo se mantengan las variables de estado de interés. Estas variables de estado son: la velocidad lineal sobre el eje  $Z$  fijo al cuerpo ( $w$ ), la velocidad angular de guiñada ( $r$ ), el ángulo de guiñada ( $\psi$ ) y la altitud ( $z$ ).

El modelo lineal reducido que representa estas dinámicas es un sistema MIMO de dos entradas, con dos salidas a ser reguladas: guiñada y altitud. Además es un sistema perturbado; en las ecuaciones dinámicas completas de los estados de interés no sólo aparecen  $w$ ,  $r$ ,  $\psi$  y  $z$ , sino que hay términos que corresponden a otras variables de estado que no son tomadas en cuenta en el modelo reducido. Suponiendo que todos los estados son medibles, se puede considerar conocida la perturbación debida a los términos adicionales. El modelo reducido se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.7985 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8290 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9968 & 0 & 0 \\ 0.9968 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ r \\ \psi \\ z \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -21.0812 & 0 \\ 0 & 43.5170 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{col} \\ \delta_{ped} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ r \\ \psi \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde:  $p_1 = -2.8143E^{-9}u + 4.3293E^{-9}q - 0.78199\phi$ ;  $p_2 = 0.911v + 0.067366p$ ;  $p_3 = 0.079795q$ ;  $p_4 = 0.079795v$

Considerando que el sistema trabajará cerca de la condición de vuelo estacionario, donde  $u = v = p = q = 0$  y  $\phi$  toma valores pequeños, se supone que las perturbaciones de interacción de estados pueden ser despreciadas. Además, los coeficientes de dichas perturbaciones son relativamente pequeños y los términos de mayor peso en cada ecuación diferencial se deben a las entradas de control. Por esto, resulta viable no considerar la perturbación de interacción de estados,  $p_{er}$ . Se sabe que para diseñar un regulador, no es una condición necesaria que las perturbaciones cumplan la condición de acoplamiento (matching condition), ya que al modelarlas como una función de los estados del exosistema, el regulador las rechaza; sin embargo, cabe mencionar que en el sistema (4.10) las perturbaciones  $p_3$  y  $p_4$  no cumplen dicha condición. Esto se puede comprobar como sigue:

Sea el sistema (4.10) descrito de forma compacta, con  $x = [w \ r \ \psi \ z]^T$ ,  $u = [\delta_{col} \ \delta_{ped}]^T$  y  $p_{er} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$ :

$$\dot{x} = A_r x + B_r u + I p_{er}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden cuatro.

Para que las cuatro componentes del vector de perturbaciones puedan ser rechazadas debe existir una matriz  $\Lambda \in M^{2 \times 4}$  tal que:

$$I = B_r \Lambda$$

Esto es, se debe cumplir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{r11} & 0 \\ 0 & b_{r22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \end{bmatrix}$$

donde  $b_{r11} = -21.0812$  y  $b_{r22} = 43.5170$ . Es evidente que esta igualdad no se cumple para ninguna matriz  $\Lambda$ .

#### 4.2.2. Estabilización del sistema

El cálculo de una ganancia de realimentación tal que reubique los valores propios de la matriz  $A_r$  a una posición deseada, se realiza también con Matlab. La elección de la ubicación de los modos se basa en pruebas del comportamiento dinámico de las variables a ser reguladas ( $\psi$  y  $z$ ), una vez que se cierra el lazo con un estabilizador. Debido a que el sistema no es diagonal, no puede asignarse directamente una dinámica a cierta variable de estado. La asignación de valores propios es muy sensible al punto de operación en que se linealiza; es decir, una cierta colocación de polos no actúa igual sobre el sistema si el punto de operación en que se linealiza cambia un poco. Una ubicación de valores propios que resulta en una dinámica rápida en el control de guiñada y altitud, es:

$$[ -0.5 \quad -12 \quad -10 \quad -1 ]$$

La ganancia de estabilización resultante para esta ubicación de valores propios es:

$$K_r = \begin{bmatrix} -0.4631 & -0.0155 & -0.0003 & 0.2399 \\ 0.0063 & 0.2783 & 0.2743 & 0.0064 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

El estabilizador obtenido se prueba inicialmente sobre el modelo de simulación simplificado, del cual fue obtenido el modelo lineal, y una vez que se consiguen buenos resultados, se prueba sobre el sistema completo. Las pruebas se realizan bajo el esquema que permite llevar el sistema al punto de equilibrio para el cual se linealiza. Esto se logra realimentando la diferencia entre las variables de estado medidas y sus valores de equilibrio, tal como se muestra en la figura 4.2. El punto de operación referido en dicha figura es solamente para aquellas variables de estado involucradas en el lazo de realimentación:  $w$ ,  $r$ ,  $\psi$  y  $z$ .

Es posible estabilizar el sistema simplificado completo atendiendo el esquema de la figura 4.3. Con una ubicación adecuada de valores propios de la matriz  $A$ , se logran buenos

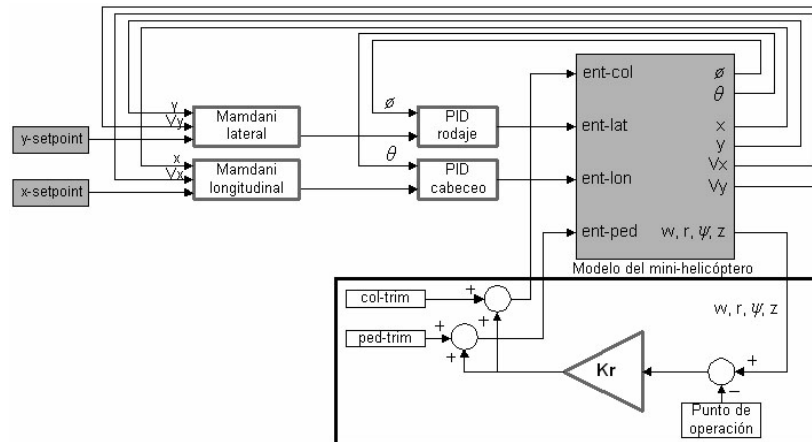


Figura 4.2: Esquema de prueba para un estabilizador de cuatro estados.

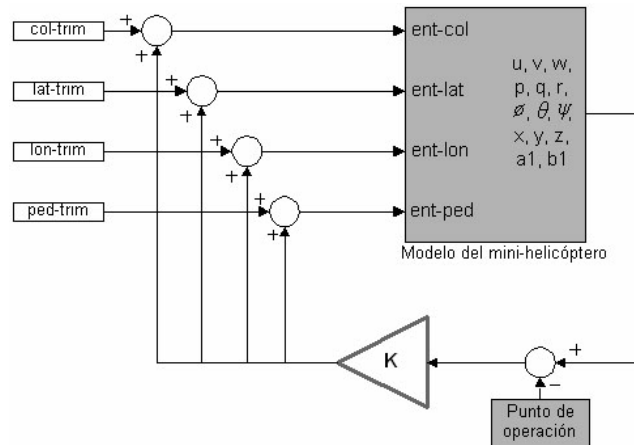


Figura 4.3: Esquema de prueba para un estabilizador de los catorce estados.

resultados sobre el sistema que incluye la dinámica de los actuadores, reducción de masa y velocidad del rotor variable. El punto de operación al que se refiere la figura 4.3 corresponde a todos los valores de las variables de estado dados en (4.9).

El apéndice C incluye el código de Matlab para hacer la siguiente reubicación de valores propios, con la cual se obtienen buenos resultados.

$$[-15, -1, -1, -2, -2, -2, -5, -5, -5, -8, -8, -8, -10, -10]$$

### 4.2.3. Diseño del regulador lineal

El cómputo de las matrices  $\Pi$  y  $\Gamma$  se realiza mediante código de Maple. En el apéndice B se anexa dicho código, el cual permite calcular las matrices del regulador para realizar

seguimiento de trayectorias para altitud. Se propone seguir una señal de la forma:

$$f_{ref}(t) = P_{cte} + P_{am} \sin(\alpha t)$$

Este código no está adaptado para que el ángulo de guiñada tome una referencia distinta de cero. Aunque de acuerdo a la teoría es posible que el ángulo de guiñada siga una señal distinta de cero, no se realiza debido a que los controladores de Mamdani están ajustados para desempeñar su labor adecuadamente bajo condiciones de ángulo de guiñada cero.

Para generar la función  $f_{ref}(t)$  mediante un sistema dinámico lineal, basta que éste sea compuesto por tres variables de estado, cuya representación y condiciones iniciales son:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{w}}_1(t) \\ \dot{\tilde{w}}_2(t) \\ \dot{\tilde{w}}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) \\ \tilde{w}_3(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(0) \\ \tilde{w}_2(0) \\ \tilde{w}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

El sistema lineal (4.12) genera señales unitarias, así que para obtener la señal requerida se debe hacer una combinación lineal de sus estados. En general, la función  $f_{ref}(t)$  expresada como combinación lineal de los estados del exosistema, es:

$$f_{ref}(t) = P_{cte}\tilde{w}_1 + P_{am}\tilde{w}_2$$

Las matrices del regulador para  $P_{cte} = 20$ ,  $P_{am} = 0$  son:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices del regulador para  $P_{cte} = 20$ ,  $P_{am} = 15$  y  $\alpha = 0.1$  son:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.504815409 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -0.7138186675E^{-2} & 0.5699842060E^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que no es posible diseñar un regulador lineal para el sistema completo a pesar de que es posible encontrar un estabilizador para el mismo. Las ecuaciones (4.3), las cuales resuelven el problema del regulador, no tienen solución ni para  $(\phi, \theta, \psi, z)$ , ni para  $(x, y, z, \psi)$  como variables de salida. Debido a la forma de la matriz  $A$ , se tienen ecuaciones lineales inconsistentes en el sistema a resolver.

### 4.3. Resultados

Esta sección reporta el desempeño del esquema de control propuesto en el presente capítulo, el cual incluye el regulador lineal. Inicialmente, se prueba el desempeño sólo de la

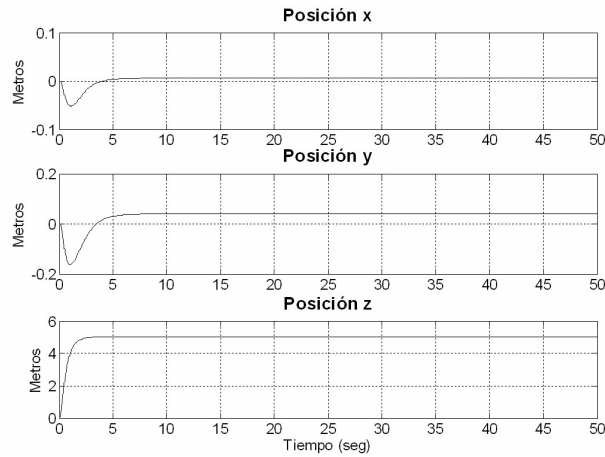


Figura 4.4: Estabilización de las posiciones por realimentación completa del estado en el sistema simplificado.

etapa de estabilización para dos casos: la estabilización del sistema simplificado (del cual se obtuvo la linealización) y la estabilización del sistema completo. En la última subsección se prueba el desempeño del sistema de control completo, agregando el regulador lineal y aplicándolo al modelo completo del helicóptero, el cual incluye disminución de masa, velocidad del rotor variable y dinámica de actuadores.

### 4.3.1. Desempeño de la etapa de estabilización

Las figuras 4.4 y 4.5 muestran el resultado de estabilizar la posición inercial y los ángulos de orientación. La simulación se realiza bajo el esquema de la figura 4.3, donde se realimentan las catorce variables de estado y se especifica el punto de operación dado en (4.9), sólo que para una altitud de 5 m. La prueba se aplica sobre el sistema simplificado.

Como resultado de la estabilización, todas las variables de estado se estabilizan en el punto de operación especificado, a pesar de que el sistema parte del reposo. Los resultados muestran un error de estado estable, que se observa en las posiciones  $x$  y  $y$ , debido a que el punto de operación utilizado corresponde al sistema no simplificado.

Las figuras 4.6 y 4.7 presentan el mismo caso anterior de estabilización sobre el sistema completo, con las mismas condiciones de operación anteriores. Ya que el punto de operación corresponde a un punto de equilibrio del sistema, no existe el error de estado estable presente en la figura 4.4. En la figura 4.8 se pueden ver las entradas requeridas para cumplir con la estabilización del sistema completo.

El estabilizador obtenido a partir del sistema simplificado tiene un buen desempeño al aplicarse sobre el sistema sin simplificar, a pesar de las variaciones de velocidad del rotor (figura 4.9). Todas las variables convergen con una buena rapidez a sus valores de equilibrio partiendo desde el reposo.

Enseguida se presenta el caso de estabilización útil para la solución del problema de



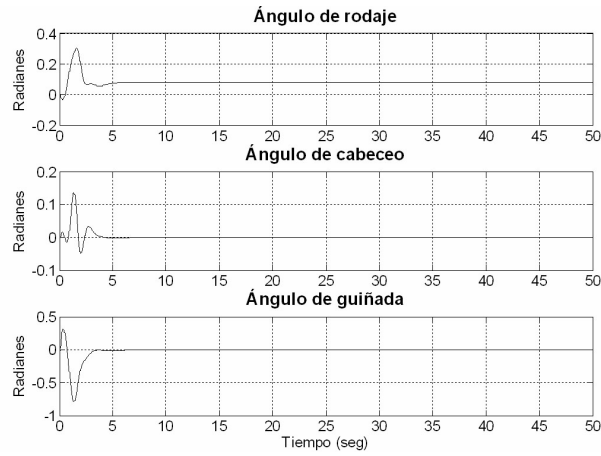


Figura 4.5: Estabilización de los ángulos de orientación por realimentación completa del estado en el sistema simplificado.

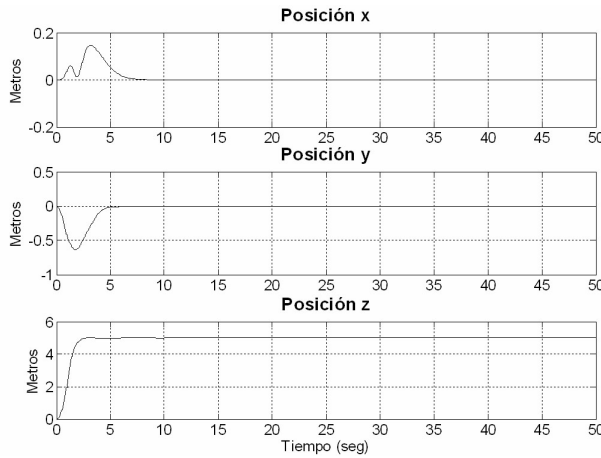


Figura 4.6: Estabilización de las posiciones por realimentación completa del estado en el sistema sin simplificar.

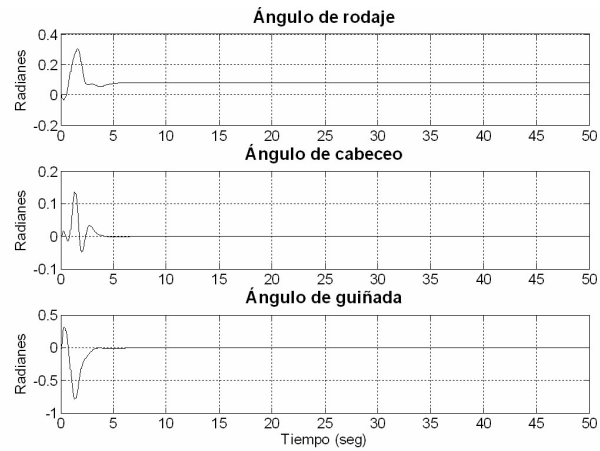


Figura 4.7: Estabilización de los ángulos de orientación por realimentación completa del estado en el sistema sin simplificar.

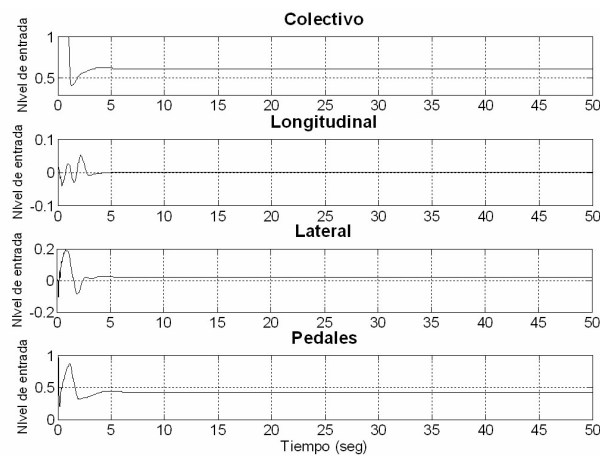


Figura 4.8: Entradas para la estabilización completa del estado en el sistema sin simplificar.

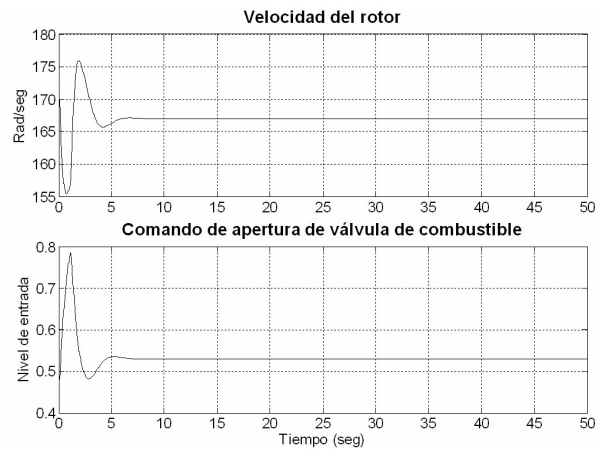


Figura 4.9: Velocidad del rotor y su entrada de control para estabilización completa del estado.

regulación, el cual se experimenta bajo el esquema de la figura 4.2. La prueba se realiza sobre el sistema no simplificado, con las mismas condiciones de operación del caso de estabilización completa del estado (dadas por (4.9) con 5 m de altitud). Las figuras 4.10 y 4.11 muestran las dinámicas de las posiciones y ángulos de orientación, respectivamente.

La figura 4.12 despliega las entradas que obtienen la dinámica anterior de posiciones y ángulos. En este caso de estabilizador de cuatro estados, sólo las entradas colectivo y pedales provienen de dicho estabilizador, y de acuerdo a la dinámica de  $z$  y  $\psi$ , estas variables son mejor controladas que en el caso de estabilización completa.

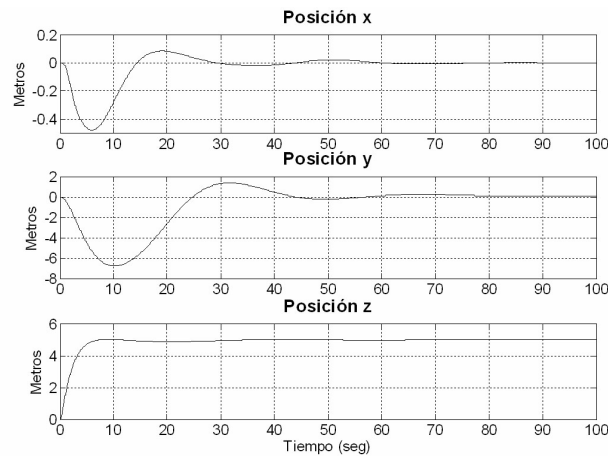


Figura 4.10: Estabilización de las posiciones por realimentación parcial del estado en el sistema sin simplificar.

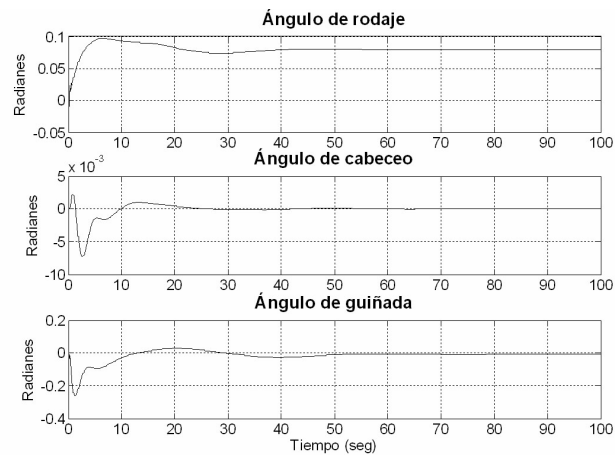


Figura 4.11: Estabilización de los ángulos de orientación por realimentación parcial del estado en el sistema sin simplificar.

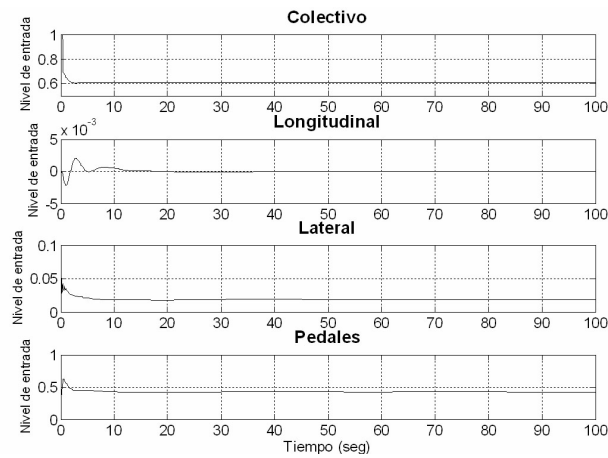


Figura 4.12: Entradas para la estabilización reducida del estado en el sistema sin simplificar.

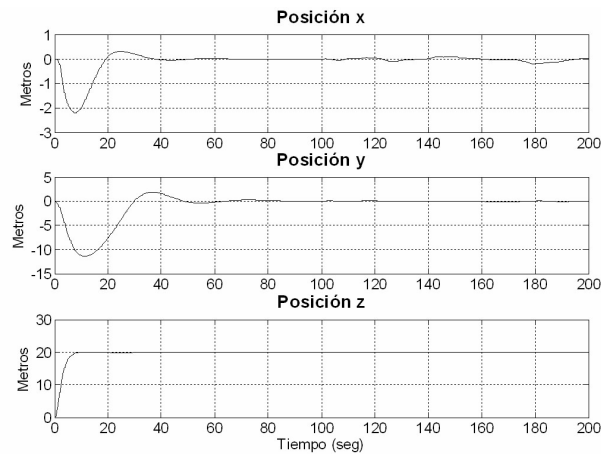


Figura 4.13: Estabilización de la posición inercial.

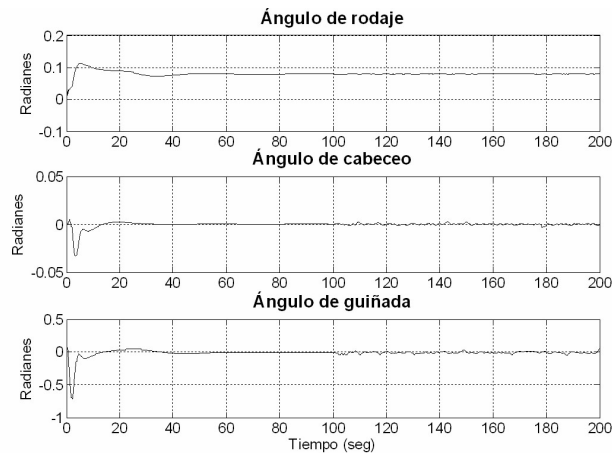


Figura 4.14: Ángulos de orientación para la estabilización de la posición.

### 4.3.2. Desempeño incluyendo el regulador lineal

En esta subsección se presenta el desempeño del esquema de control completo de la figura 4.1. La figura 4.13 despliega el comportamiento de la posición inercial para cada eje coordenado. Los puntos de ajuste en la posición longitudinal y lateral son cero. La altitud tiene una referencia constante de 20 m. Las posiciones  $x$  y  $y$  regresan a cero después de un transitorio aceptable. Esto se logra gracias a que los ángulos de orientación se establecen en su condición de equilibrio: 0.07988 para rodaje y cero para cabeceo, como lo muestra la figura 4.14.

Dada la condición de estabilización de la posición y de los ángulos de orientación, se asegura que el mini-helicóptero está desarrollando vuelo estacionario.

En la figura 4.15 se observan las señales de entrada requeridas para lograr la condición

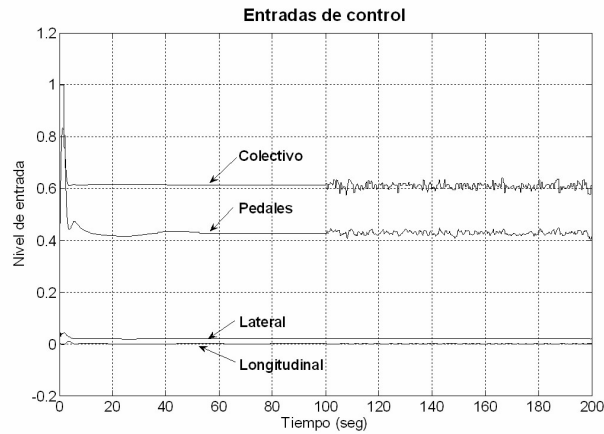


Figura 4.15: Entradas de control para alcanzar la condición de vuelo estacionario.

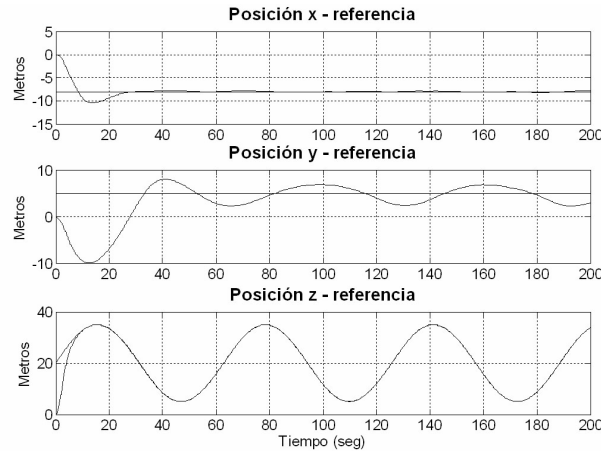


Figura 4.16: Seguimiento de trayectoria para cada posición.

de vuelo estacionario, independientemente de la presencia de la perturbación de viento aplicada a los 100 s. El valor máximo de la señal de ruido es la unidad, lo cual representa una velocidad de viento de 1 m/s. El periodo de muestreo del ruido blanco es de 0.5 s.

Para establecer un punto de comparación para la tarea de seguimiento en altitud, entre el controlador del capítulo 3 y el diseñado con teoría de regulación, a continuación se presenta la dinámica de la posición inercial para el seguimiento de una constante en la posición longitudinal y lateral, así como el seguimiento de una señal senoidal en altitud. Las referencias constantes son  $-8$  m y  $5$  m para las posiciones  $x$  y  $y$  respectivamente. En el regulador  $P_{cte} = 20$ ,  $P_{am} = 15$  y  $\alpha = 0.1$  rad/s. Se observa un comportamiento similar al obtenido en el capítulo 3; sin embargo, existe mejoría en la dinámica de la altitud, tiene mayor rapidez y sin sobrepaso.

En la figura 4.17 se muestra la dinámica de los ángulos de orientación, con los cuales

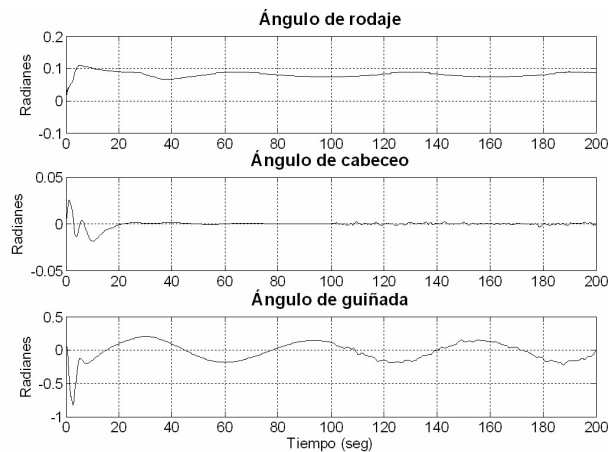


Figura 4.17: Ángulos de orientación para lograr seguimiento en cada posición.

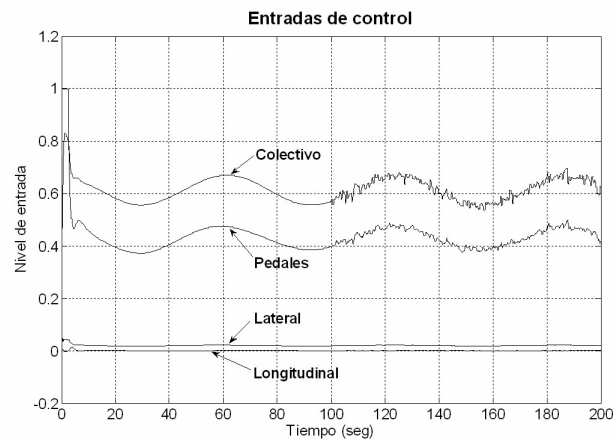


Figura 4.18: Entradas de control para lograr seguimiento en cada posición.

se logra la condición previa de seguimiento en posición. En esta figura es apreciable el mejor control del ángulo de guiñada, respecto a los resultados del tercer capítulo. El transitorio inicial es menor en este caso, aunque no se reduce la oscilación provocada por el acoplamiento entre el colectivo y la guiñada.

La figura 4.18 presenta las señales de entrada requeridas para lograr la condición de seguimiento en cada posición. Se muestra como las entradas reaccionan ante la presencia de la perturbación de viento aplicada a los 100 s.

Respecto a la dinámica de la velocidad del rotor, la figura 4.19 muestra una gráfica semejante a la presentada en la figura 3.20; sin embargo, es menor el sobrepaso en el transitorio, siendo más suave el cambio de apertura de la válvula de combustible.

Finalmente, para mostrar la capacidad de posicionamiento del mini-helicóptero en el espacio, se hace que éste se dirija a cuatro puntos equidistantes, formando un cuadro en

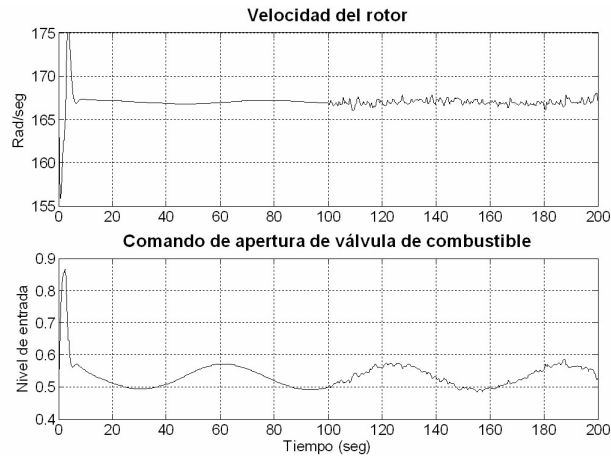


Figura 4.19: Velocidad del rotor y su entrada de control para la condición de seguimiento de trayectoria en posición.

el plano  $x - y$ . En la figura 4.20 se observa como se logra ubicar al vehículo en los puntos requeridos y en la figura 4.21, se muestran los ángulos de orientación con que se consiguen estos movimientos.

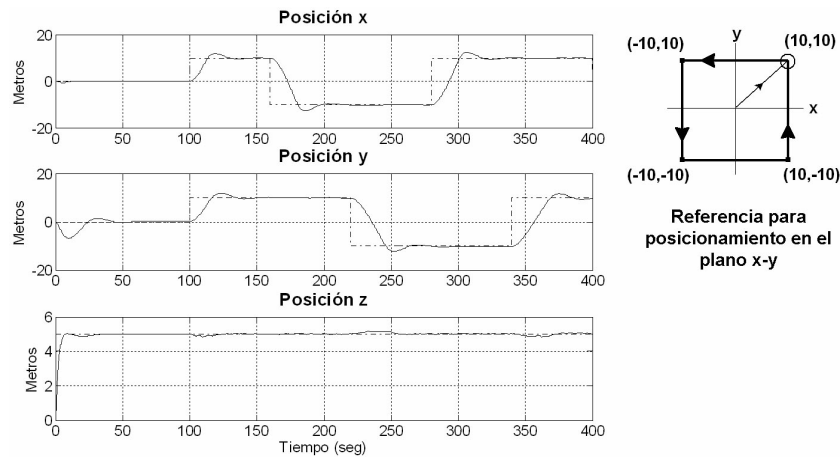


Figura 4.20: Posicionamiento del helicóptero formando un cuadro en el plano  $x - y$ .

### 4.3.3. Comparación con trabajos previos

El esquema de control propuesto en este capítulo se asemeja al utilizado en [7], donde se propone un lazo de control interno con un controlador de altitud y orientación y un lazo externo que establece las referencias de los tres ángulos de orientación. El lazo externo se basa en los controladores utilizados por Sugeno en [19], por lo que los controladores difusos



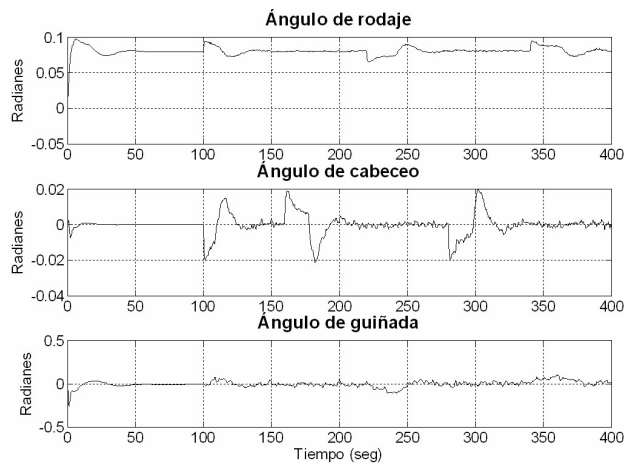


Figura 4.21: Ángulos de orientación para lograr el posicionamiento en cuatro puntos del plano  $x - y$ .

propuestos en esta tesis son más sencillos, aunque sólo se desarrollaron para los ángulos de rodaje y cabeceo. El lazo interno es distinto, ya que en [7] se utiliza un controlador difuso Takagi-Sugeno multivariable con realimentación de salida dinámica como controlador de altitud y orientación. En esta tesis, ya que no fue posible diseñar un regulador MIMO con la metodología Takagi-Sugeno, se utiliza la teoría del regulador lineal para controlar parte de la dinámica.

El controlador de altitud y postura presentado en [7] es capaz de hacer seguimiento de trayectoria simultáneo con los ángulos de orientación; logrado porque se trabaja con un modelo desacoplado del helicóptero al despreciar algunos términos de acoplamiento. El modelo matemático en dicho trabajo es válido sólo para vuelo estacionario y aproxima las dinámicas del helicóptero APID-MK3. Al seguir señales constantes, se obtiene una buena respuesta; sin embargo, al seguir una señal senoidal existe un error de estado estacionario persistente en altitud y en los ángulos de orientación. Con el controlador propuesto en este capítulo de la tesis no existe error de estado estable al seguir una señal senoidal para altitud. En esta tesis y en el trabajo citado, se simula el gasto de combustible y la presencia de perturbaciones de viento sin afectar al sistema en forma significativa.

Una ventaja del sistema de control en [7] es la posibilidad de manipular el ángulo de guiñada; con ello se logra el posicionamiento que forma un cuadro en el plano  $x - y$  con un movimiento siempre hacia adelante; es decir, girando el fuselaje en la forma requerida. Además, se logra el seguimiento de una trayectoria circular en el plano  $x - y$ .

# Capítulo 5

## Control inteligente híbrido difuso y no lineal

Este capítulo describe la aplicación de la teoría de control no lineal para el diseño de un controlador de altitud y orientación, para que junto con los controladores difusos tipo Mamdani, permitan hacer posicionamiento del helicóptero en el espacio. Debido a la complejidad del modelo matemático del capítulo dos, en este capítulo se utiliza un modelo simplificado. En la sección 5.1 se introducen los fundamentos teóricos para el diseño del controlador no lineal. Además, en la misma sección se establece el modelo simplificado, a partir del cual se realiza el diseño. La sección 5.2 presenta los detalles del proceso de diseño, y finalmente, la sección 5.3 muestra los resultados obtenidos con la aplicación de este sistema de control.

### 5.1. Antecedentes

Esta sección presenta las ideas principales de la teoría no lineal sobre realimentación del estado. Se especifica un nuevo modelo matemático no lineal que se obtiene a partir de la reducción del modelo expuesto en el segundo capítulo; diseñar un controlador no lineal con base a la representación del sistema completo resulta muy difícil y totalmente impráctico.

#### 5.1.1. Linealización exacta por realimentación del estado

A continuación se expone la teoría no lineal sobre linealización exacta por realimentación de estado para el caso MIMO. La información es tomada de [5]. Otras referencias sobre el tema son [10] y [18]. El sistema no lineal multivariable en el espacio de estados que se considera en este capítulo se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

en donde  $f(x)$ ,  $g_1(x)$ , ...,  $g_m(x)$  son campos vectoriales suaves, y  $h_1(x)$ , ...,  $h_m(x)$  son funciones suaves definidas en un conjunto abierto de  $R^n$ .

El sistema (5.1) se puede describir en forma condensada como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} u &= \text{col}(u_1, \dots, u_m) \\ y &= \text{col}(y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (g_1(x) \dots g_m(x)) \\ h(x) &= \text{col}(h_1(x), \dots, h_m(x)) \end{aligned}$$

$g(x)$  es una matriz de  $n \times m$  y  $h(x)$  es un vector de  $m$  renglones.

El punto de partida para establecer el tipo de sistemas a tratar en este capítulo, es definir la noción de grado relativo para el caso multivariable. Un sistema multivariable cuadrado de la forma (5.1) tiene un vector de grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en un punto  $x^o$  si

(i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \tag{5.2}$$

para toda  $1 \leq j \leq m$ , para toda  $k < r_i - 1$ , para toda  $1 \leq i \leq m$ , y para toda  $x$  en una vecindad de  $x^o$ .

(ii) la matriz de  $m \times m$

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

es no singular en  $x = x^o$ .

Suponer que un sistema tiene un vector de grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^o$ , tal que

$$r_1 + \dots + r_m \leq n$$

Para  $1 \leq i \leq m$ , hacer

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x) &= h_i(x) \\ \phi_2^i(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{aligned}$$

Si  $r = r_1 + \dots + r_m$  es estrictamente menor que  $n$ , siempre es posible encontrar  $n - r$  funciones adicionales  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  tal que el mapeo

$$\Phi(x) = \text{col}(\phi_1^1(x), \dots, \phi_{r_1}^1(x), \phi_1^m(x), \dots, \phi_{r_m}^m(x), \phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)) \quad (5.4)$$

tiene un jacobiano no singular en  $x^o$  y consecuentemente califica como una transformación de coordenadas local en una vecindad de  $x^o$ . El valor de  $x^o$  de las funciones adicionales se puede escoger arbitrariamente.

Entonces, sea

$$\xi^i = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \vdots \\ \xi_{r_i}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^i(x) \\ \phi_2^i(x) \\ \vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) \end{pmatrix}$$

para  $1 \leq i \leq m$ ,

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

De esta forma, con la transformación de coordenadas  $\Phi(\xi, \eta)$ , es posible llevar al sistema (5.1) a su *forma normal*, la cual se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \\ y_i &= \xi_1^i \end{aligned} \quad (5.5)$$

para  $1 \leq i \leq m$ . Donde

$$\begin{aligned} a_{ij}(\xi, \eta) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) && \text{para } 1 \leq i, j \leq m \\ b_i(\xi, \eta) &= L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) && \text{para } 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Para el caso donde  $r_1 + \dots + r_m < n$ , las ecuaciones diferenciales restantes que constituyen la *dinámica cero*, en general se expresan como:

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m p_i(\xi, \eta) u_i = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta) \quad (5.6)$$

Note que en el sistema (5.5), los coeficientes  $a_{ij}(\xi, \eta)$  son exactamente los elementos de la matriz (5.3), con  $x$  remplazada por  $\Phi^{-1}(\xi, \eta)$ , y los coeficientes  $b_i(\xi, \eta)$ , son los elementos del vector

$$b(x) = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

### El problema del control no interactuante

Este problema consiste en que dado el sistema (5.1), encontrar una ley de control estática por realimentación del estado

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) v_j \quad (5.8)$$

definida en una vecindad  $U$  de  $x = 0$ , con  $\alpha_i(0) = 0$ , tal que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^m g_i(x) \beta_{ij}(x) \right) v_j && (5.9) \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned}$$

tiene un vector de grado relativo en el punto de equilibrio  $x = 0$  y, para cada  $1 \leq i \leq m$ , la salida  $y_i$  es afectada sólo por la entrada correspondiente  $v_i$  y no por  $v_j$ , cuando  $j \neq i$ .

La solución al problema del control no interactuante se establece en el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [5].

**Teorema 2** *El problema del control no interactuante tiene solución si y sólo si la matriz  $A(0)$  es no singular, esto es, si el sistema tiene un vector de grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x = 0$ .*

La ley de control (5.8) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = -A^{-1}(\xi, \eta) b(\xi, \eta) + A^{-1}(\xi, \eta) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Esta realimentación produce un sistema caracterizado por los  $m$  conjuntos de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= v_i \\ y_i &= \xi_1^i \end{aligned} \quad (5.11)$$

para  $1 \leq i \leq m$ , junto con un conjunto adicional de la forma

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)v \quad (5.12)$$

La estructura del sistema (5.11) muestra que se cumple el requerimiento de no interacción. Si  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_m$  no es igual a  $n$ , se presenta una parte no observable (5.12) en el sistema en lazo cerrado (*dinámica cero*), la cual probablemente es afectada por todas las entradas y todos los estados, pero no tiene efecto en las salidas. Por otro lado, si  $r = n$ , no existe dinámica no observable.

De esta manera, se deduce que una realimentación de la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

con  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  dadas por

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad \beta(x) = A^{-1}(x)$$

con  $A(x)$  y  $b(x)$  como en (5.3) y (5.7) resuelve el problema del control no interactuante. Una vez que se conoce  $A^{-1}(x)$  y  $b(x)$ , se obtiene directamente la ley de control:

$$u = A^{-1}(x)[-b(x) + v] \quad (5.13)$$

donde  $v = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_m)$  es el nuevo vector de entrada al sistema, el cual permite asignar una dinámica que conduzca al sistema asintóticamente a su punto de equilibrio. La nueva entrada es de la forma:

$$v_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \dots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i + \bar{v}_i$$

que en coordenadas originales se expresa como:

$$v_i = -c_0^i h_i(x) - c_1^i L_f h_i(x) - \dots - c_{r_i-1}^i L_f^{r_i-1} h_i(x) + \bar{v}_i \quad (5.14)$$

para  $1 \leq i \leq m$ . Estas entradas producen un sistema en lazo cerrado caracterizado por la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_0^i & -c_1^i & -c_2^i & \dots & -c_{r_i-1}^i \end{pmatrix} \xi^i + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{v}_i \\ y_i &= (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \xi^i \end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq m$  y

$$\dot{\eta} = \bar{q}(\xi, \eta) + \bar{p}(\xi, \eta) \bar{v}$$

donde  $\bar{q}(\xi, \eta)$  y  $\bar{p}(\xi, \eta)$  son funciones adecuadas.

En particular, los sistemas obtenidos de esta forma tienen un comportamiento lineal de entrada-salida caracterizado por la matriz diagonal de funciones de transferencia

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1(s)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2(s)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_m(s)} \end{pmatrix}$$

con

$$d_i(s) = c_0^i + c_1^i s + \dots + c_{r_i-1}^i s^{r_i-1} + s^{r_i} \quad (5.15)$$

Si la dinámica cero del sistema es asintóticamente estable, y los polinomios (5.15) tienen todas las raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo, el sistema (5.11-5.12) es localmente asintóticamente estable en  $(\xi, \eta) = (0, 0)$ .

Toda la teoría anterior es aplicable para seguimiento asintótico de trayectorias; sólo se requiere definir un sistema de error, el cual determina la dinámica de la diferencia entre la salida real  $y(t)$  y la referencia de salida  $y_R(t)$ :

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \quad (5.16)$$

En este caso, la ley de control se modifica a la siguiente:

$$u = A^{-1}(x)[-b(x) + y_R^{vec} + v] \quad (5.17)$$

donde  $y_R^{vec} = \text{col}(y_{R_1}^{(r_1)}, y_{R_2}^{(r_2)}, \dots, y_{R_m}^{(r_m)})$ .  $y_{R_i}^{(r_i)}$  representa la  $r_i$ -ésima derivada de la  $i$ -ésima señal de referencia.

### 5.1.2. Modelo matemático simplificado

Un modelo matemático simplificado para la condición de vuelo estacionario sobre el que es posible aplicar linealización de entrada-salida se describe a continuación. La motivación para trabajar al respecto es analizar las propiedades del modelo y determinar si es posible aplicar un controlador diseñado a partir de un modelo simplificado al sistema completo.

Las ecuaciones para velocidades lineales están dadas por (5.18). Las simplificaciones aplicadas para llegar a ellas son: no existen fuerzas aerodinámicas. Estas fuerzas son producidas por el fuselaje y los estabilizadores, y dependen de la velocidad del vehículo. Las velocidades para cada eje, cerca de vuelo estacionario, se aproximan a cero y consecuentemente las fuerzas aerodinámicas pueden ser despreciadas. Por la misma razón no existen fuerzas de Coriolis, la cual esta dada en (2.1) por el producto cruzado  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ . Además, las razones de avance,  $\mu_{mr}$  y  $\mu_{tr}$ , también tienden a cero.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -gs\theta - C_T^{mr} a_1 / m \\ \dot{v} &= gs\phi c\theta + (C_T^{mr} b_1 - C_T^{tr}) / m \\ \dot{w} &= gc\phi c\theta - C_T^{mr} / m \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde  $C_T^{mr} = k_1 \delta_{col} - k_2$ ,  $C_T^{tr} = k_3 \delta_{ped} - k_4$ ,  $k_1 = \frac{\rho(\Omega R_{mr})^2 \pi R_{mr}^2 a_{mr} \sigma_{mr}}{6}$ ,  $k_2 = \frac{\rho(\Omega R_{mr})^2 \pi R_{mr}^2 a_{mr} \sigma_{mr} \lambda_{mr}}{4}$ ,  $k_3 = \frac{\rho f_t (n_{tr} \Omega R_{tr})^2 \pi R_{tr}^2 a_{tr} \sigma_{tr}}{6}$ ,  $k_4 = \frac{\rho f_t (n_{tr} \Omega R_{tr})^2 \pi R_{tr}^2 a_{tr} \sigma_{tr} \lambda_{tr}}{4}$ ,  $s(\cdot) = \sin(\cdot)$ ,  $c(\cdot) = \cos(\cdot)$ . Se considera que  $\lambda_{mr} = 0.037$ ,  $\lambda_{tr} = 0.08785$ , cuyos valores son obtenidos a partir de las simulaciones realizadas con los sistemas de control de capítulos anteriores. También se considera constante la masa total del helicóptero,  $m$ .

Las simplificaciones realizadas en las fuerzas se reflejan en las ecuaciones de momentos, además de que no existen momentos giroscópicos, dados por el término  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$  que aparece en (2.2). Los momentos giroscópicos son despreciables debido a que las velocidades angulares, para la condición de vuelo estacionario, tienden a cero. Al igual que en casos anteriores, la velocidad del rotor es constante, por lo que el antitorque del motor,  $Q_e$ , también lo es. Las ecuaciones de velocidades angulares se reducen a las mostradas en (5.19).

$$\begin{aligned} \dot{p} &= k_5 [(k_6 + C_T^{mr} k_7) b_1 - C_T^{tr} k_8] \\ \dot{q} &= k_9 (k_6 + C_T^{mr} k_7) a_1 \\ \dot{r} &= k_{10} (-Q_e + C_T^{tr} k_{11}) \end{aligned} \quad (5.19)$$



donde  $k_5 = \frac{1}{I_{xx}}$ ,  $k_6 = k_\beta$ ,  $k_7 = h_{mr}$ ,  $k_8 = h_{tr}$ ,  $k_9 = \frac{1}{I_{yy}}$ ,  $k_{10} = \frac{1}{I_{zz}}$ ,  $k_{11} = l_{tr}$ ,  $Q_e = 6.5868$ .

En (5.20) se establecen las ecuaciones dinámicas de las posiciones inerciales. La única diferencia con las ecuaciones dadas en (2.5), es que en el caso presente se cambia de signo la ecuación para altitud, con lo que directamente se obtienen los resultados con el signo adecuado.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (c\theta c\psi)u + (s\phi s\theta c\psi - c\theta s\psi)v + (c\phi s\theta c\psi + s\theta s\psi)w \\ \dot{y} &= (c\theta s\psi)u + (s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi)v + (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi)w \\ \dot{z} &= (s\theta)u - (s\phi c\theta)v - (c\phi c\theta)w \end{aligned} \quad (5.20)$$

Las ecuaciones dinámicas para los ángulos de orientación se presentan en (5.21). Estas ecuaciones son las mismas que se establecen en (2.7), donde se expresan como una transformación de las velocidades angulares.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + (t\theta s\phi)q + (t\theta c\phi)r \\ \dot{\theta} &= (c\phi)q - (s\phi)r \\ \dot{\psi} &= (s\phi/c\theta)q + (c\phi/c\theta)r \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde  $s(\cdot) = \sin(\cdot)$ ,  $c(\cdot) = \cos(\cdot)$ ,  $t(\cdot) = \tan(\cdot)$ .

La dinámica del rotor presentada en (2.8), se simplifica a las ecuaciones dadas en (5.22). En este caso, la reducción corresponde a los términos que son función de las velocidades lineales, las cuales se consideran muy cerca de cero.

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -q - k_{12}a_1 + k_{13}\delta_{lon} \\ \dot{b}_1 &= -p - k_{12}b_1 + k_{14}\delta_{lat} \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde  $k_{12} = \frac{1}{\tau_e}$ ,  $k_{13} = \frac{A_{\delta_{lon}}^{nom}}{\tau_e}$ ,  $k_{14} = \frac{B_{\delta_{lat}}^{nom}}{\tau_e}$ .

Finalmente, para tomar en cuenta que el efecto de la acción de control no es instantánea, y dado que conviene no incrementar el orden del sistema, los actuadores se modelan como sistemas lineales de primer orden, de acuerdo a (5.23).

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{col} &= -k_{15}\delta_{col} + g_{col}k_{15}u_1 \\ \dot{\delta}_{lat} &= -k_{15}\delta_{lat} + g_{lat}k_{15}u_2 \\ \dot{\delta}_{lon} &= -k_{15}\delta_{lon} + g_{lon}k_{15}u_3 \\ \dot{\delta}_{ped} &= -k_{16}\delta_{ped} + k_{16}(\delta_{ped}^{trim} + g_{ped}u_4) \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde  $g_{lon} = 0.096$ ,  $g_{lat} = 0.096$ ,  $g_{col} = 0.183$ , y  $g_{ped} = 0.38$ . Estos valores son las deflexiones máximas de los actuadores dadas en la subsección 2.2.5 y permiten que las

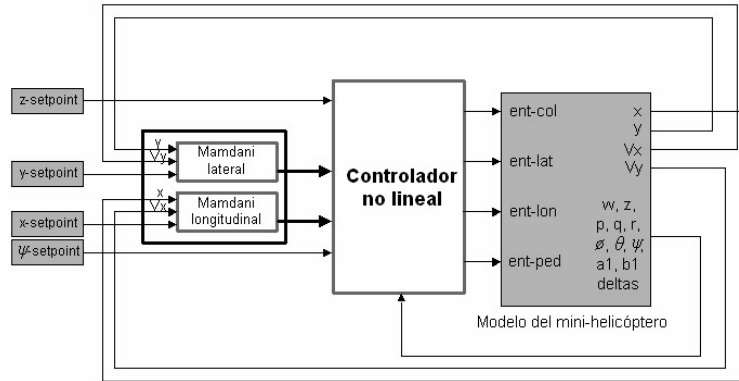


Figura 5.1: Esquema con un controlador no lineal para las dinámicas de altitud y orientación.

entradas se ajusten al rango  $[-1, 1]$ . De acuerdo a la rapidez de los actuadores modelados como en (2.43), se estimó que  $k_{15} = 25$ . De forma similar, la función de transferencia de segundo orden del actuador de pedales se aproximó con la mostrada en (5.23) para  $k_{16} = 35$ .

Las dieciocho ecuaciones dinámicas anteriores integran un sistema simplificado que aproxima el comportamiento del mini-helicóptero X-Cell para vuelo estacionario.

## 5.2. Diseño

En esta sección se presenta un panorama general del diseño de un controlador no lineal, capaz de hacer seguimiento de trayectorias, utilizando linealización exacta por realimentación de estados.

La figura 5.1 muestra un nuevo esquema de control para el mini-helicóptero, donde se mantiene la filosofía de control manifestada en el primer capítulo. El esquema propone un controlador no lineal para el control de altitud y orientación. Como en los sistemas de control de capítulos previos, dos controladores de Mamdani establecen la referencia para el ángulo de rodaje y para el ángulo de cabeceo.

De esta manera, el esquema de la figura 5.1 requiere el diseño de un estabilizador asintótico para el sistema de error de seguimiento. Para ello es necesario analizar la propiedad de grado relativo del sistema, considerando como salidas:  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  y  $z$ . Sin embargo, aún con el sistema reducido, la tarea de analizar el grado relativo no es fácil y se propone aproximar las funciones trigonométricas del modelo para argumentos pequeños. Para vuelo estacionario se cumple que  $\phi$  y  $\theta < 0.1$  rad, por lo que:

$$\sin(\cdot) \approx 0, \quad \cos(\cdot) \approx 1$$

Por lo tanto, (5.21) se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= p \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r\end{aligned}\tag{5.24}$$

De forma semejante, la dinámica de la altitud y su velocidad se reducen a:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -w \\ \dot{w} &= g - C_T^{mr}/m\end{aligned}\tag{5.25}$$

Finalmente, el modelo matemático apropiado para diseñar un controlador con técnicas no lineales lo constituyen las ecuaciones (5.19), (5.22), (5.23), (5.24) y (5.25). Nótese que no se consideran las ecuaciones de  $u$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$ , ya que se propuso controlar la dinámica lateral y longitudinal con los controladores difusos. Por lo tanto, se trabaja con un sistema de orden catorce ( $n = 14$ ), cuatro entradas ( $m = 4$ ) y se definen las siguientes cuatro salidas:

$$\begin{aligned}y_1 &= z \\ y_2 &= \phi \\ y_3 &= \theta \\ y_4 &= \psi\end{aligned}\tag{5.26}$$

Con esto se define un sistema cuadrado al que se puede investigar su característica de grado relativo. Un proceso que equivale a obtener las derivadas de Lie, como lo requiere la definición de grado relativo, es derivar sucesivamente cada una de las salidas para detectar en que momento aparece explícitamente alguna de las entradas. Este procedimiento resulta en lo siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \frac{k_1 k_{15}}{m} (-\delta_{col} + g_{col} u_1) \\ \ddot{y}_2 &= k_5 \{ [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] (-p - k_{12} b_1 + k_{14} \delta_{lat}) + k_1 k_7 k_{15} b_1 (-\delta_{col} + g_{col} u_1) \} \\ &\quad - k_3 k_5 k_8 k_{16} [-\delta_{ped} + (\delta_{ped}^{trim} + g_{ped} u_4)] \\ \ddot{y}_3 &= k_9 \{ [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] (-q - k_{12} a_1 + k_{13} \delta_{lon}) + k_1 k_7 k_{15} a_1 (-\delta_{col} + g_{col} u_1) \} \\ \ddot{y}_4 &= k_3 k_{10} k_{11} k_{16} [-\delta_{ped} + (\delta_{ped}^{trim} + g_{ped} u_4)]\end{aligned}\tag{5.27}$$

En cada caso aparecen entradas en la tercera derivación y siempre figuran  $u_1$  y  $u_4$ . Con esto no se cumple la condición de grado relativo y se debe aplicar el *algoritmo de extensión dinámica* ([5]), con el fin de alcanzar la condición para desacoplar el sistema y para no obtener dinámica cero. Como aparecen primero las entradas  $u_1$  y  $u_4$  es necesario retrasar su aparición. Para esto se definen dos ecuaciones diferenciales auxiliares:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= u_{au_1} \\ \dot{u}_4 &= u_{au_2}\end{aligned}\quad (5.28)$$

donde  $u_{au_1}$  y  $u_{au_2}$  son entradas auxiliares que permiten retardar la aparición de las entradas reales  $u_3$  y  $u_4$  hasta una cuarta derivación, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}y_1^{(4)} &= \frac{k_1 k_{15}^2}{m} (\delta_{col} - g_{col} u_1) + \frac{k_1 k_{15} g_{col}}{m} u_{au_1} \\ y_2^{(4)} &= k_5 \left\{ k_1 k_7 \dot{\delta}_{col} (2\dot{b}_1 - k_{15} b_1) + k_3 k_8 k_{16} \dot{\delta}_{ped} \right\} \\ &\quad + k_5 [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] (-\dot{p} - k_{12} \dot{b}_1 - k_{14} k_{15} \delta_{lat}) \\ &\quad + k_5 \{ k_1 k_7 k_{15} g_{col} b_1 u_{au_1} + k_{14} k_{15} [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] g_{lat} u_2 - k_3 k_8 k_{16} g_{ped} u_{au_2} \} \\ y_3^{(4)} &= k_9 \left\{ k_1 k_7 \dot{\delta}_{col} (2\dot{a}_1 - k_{15} a_1) + [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] (-\dot{q} - k_{12} \dot{a}_1 - k_{13} k_{15} \delta_{lon}) \right\} \\ &\quad + k_9 \{ k_1 k_7 k_{15} g_{col} a_1 u_{au_1} + k_{13} k_{15} [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] g_{lon} u_3 \} \\ y_4^{(4)} &= -k_3 k_{10} k_{11} k_{16} \dot{\delta}_{ped} + k_3 k_{10} k_{11} k_{16} g_{ped} u_{au_2}\end{aligned}\quad (5.29)$$

De (5.29) se obtiene la siguiente matriz de desacoplamiento:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_{15} g_{col}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ k_1 k_5 k_7 k_{15} g_{col} b_1 & a_{22} & 0 & -k_3 k_5 k_8 k_{16} g_{ped} \\ k_1 k_7 k_9 k_{15} g_{col} a_1 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 k_{10} k_{11} k_{16} g_{ped} \end{bmatrix}\quad (5.30)$$

donde  $a_{22} = k_5 k_{14} k_{15} [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] g_{lat}$ ,  $a_{33} = k_9 k_{13} k_{15} [k_6 + (k_1 \delta_{col} - k_2) k_7] g_{lon}$ . Esta matriz es no singular para cualquier valor de los estados, como se puede observar a continuación:

$$A^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{m}{k_1 k_{15} g_{col}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m k_5 k_7 b_1} & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \frac{k_5 k_8}{k_{10} k_{11} a_{22}} \\ \frac{1}{m k_7 k_9 a_1} & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ \frac{1}{a_{33}} & 0 & 0 & \frac{1}{k_3 k_{10} k_{11} k_{16} g_{ped}} \end{bmatrix}\quad (5.31)$$

Con esto se consigue un vector de grado relativo  $\{4, 4, 4, 4\}$  para 16 estados (14 reales y dos auxiliares), lo cual cumple la condición para desacoplamiento del sistema. Además, no existen dinámicas no observables debido a que  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 4$ ,  $r_3 = 4$ ,  $r_4 = 4$  y  $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 16 = n$ .

De (5.29) se obtiene el vector de no linealidades que se requiere eliminar:

$$b(x) = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_{15}^2}{m} (\delta_{\text{col}} - g_{\text{col}} u_1) \\ b_2(x) \\ b_3(x) \\ -k_3 k_{10} k_{11} k_{16} \dot{\delta}_{\text{ped}} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

donde  $b_2(x) = b_{21}(x) + b_{22}(x)$  y  $b_3(x) = b_{31}(x) + b_{32}(x)$ ,

con  $b_{21}(x) = k_5 \left[ k_1 k_7 \dot{\delta}_{\text{col}} (2\dot{b}_1 - k_{15} b_1) + k_3 k_8 k_{16} \dot{\delta}_{\text{ped}} \right]$ ,

$b_{22}(x) = k_5 [k_6 + (k_1 \delta_{\text{col}} - k_2) k_7] (-\dot{p} - k_{12} \dot{b}_1 - k_{14} k_{15} \delta_{\text{lat}})$ ,  $b_{31}(x) = k_1 k_7 k_9 \dot{\delta}_{\text{col}} (2\dot{a}_1 - k_{15} a_1)$ ,

$b_{32}(x) = k_9 [k_6 + (k_1 \delta_{\text{col}} - k_2) k_7] (-\dot{q} - k_{12} \dot{a}_1 - k_{13} k_{15} \delta_{\text{lon}})$ .

Una vez que se ha alcanzado la condición de grado relativo para conseguir desacoplar el sistema, se requiere que las cuatro salidas definidas sigan una trayectoria deseada, por lo que se trabaja con el sistema de error que se obtiene a partir de lo siguiente:

$$\begin{aligned} e_1^1 &= y_1 - y_{1r} = z - z_r \\ e_1^2 &= y_2 - y_{2r} = \phi - \phi_r \\ e_1^3 &= y_3 - y_{3r} = \theta - \theta_r \\ e_1^4 &= y_4 - y_{4r} = \psi - \psi_r \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se desea seguir señales de la forma:

$$y_{ref_i}(t) = P_{cte_i} + P_{am_i} \sin(\alpha_i t)$$

cuya cuarta derivada esta dada por:

$$y_{ref_i}^{(4)}(t) = \alpha_i^4 P_{am_i} \sin(\alpha_i t)$$

Un punto importante al asignar la dinámica que permita llegar asintóticamente al punto deseado, es cuidar la saturación de los actuadores. A diferencia de los controladores de capítulos anteriores, en este controlador no lineal es estrictamente necesario que no exista saturación. Los polinomios característicos que logran un buen desempeño y que evitan la saturación son los siguientes:

$$\begin{aligned} d_z(s) &= 144 + 168s + 73s^2 + 14s^3 + s^4 \\ d_\phi(s) &= 6400 + 2880s + 484s^2 + 36s^3 + s^4 \\ d_\theta(s) &= 2304 + 1344s + 292s^2 + 28s^3 + s^4 \\ d_\psi(s) &= 6400 + 2880s + 484s^2 + 36s^3 + s^4 \end{aligned}$$

La dinámica de la altitud es mucho más lenta, ya que es la primera que puede producir saturación. Incluso, los actuadores se llegan a saturar con estas dinámicas si la condición inicial no es cercana a la referencia. Con lo anterior se ha definido todo lo necesario para aplicar la ley de control no lineal dada en (5.17).

## 5.3. Resultados

En esta sección se presenta el resultado de la simulación del esquema de control de la figura 5.1, diseñado a partir de la aproximación de las funciones trigonométricas para pequeños ángulos, pero aplicado sobre el modelo matemático sin aproximar, el cual es descrito en la primera sección de este capítulo.

### 5.3.1. Desempeño del sistema de control

En esta subsección se presenta un resultado que no se logra con los sistemas de control de los capítulos anteriores debido al acoplamiento entre las dinámicas de los ángulos de orientación. El problema se soluciona para el sistema simplificado con el uso de técnicas no lineales para desacoplamiento. No se logró obtener ningún resultado adecuado al aplicar el sistema de control de este capítulo sobre el modelo matemático del capítulo dos, debido a la falta de robustez del controlador no lineal.

#### Controlador no lineal

En la figura 5.2 se muestra como los ángulos de orientación pueden seguir señales senoidales de manera simultánea. Las señales de referencia son:  $f_\phi(t) = 0.1\sin(0.1t - \pi/2)$ ,  $f_\theta(t) = 0.2\sin(0.2t)$ ,  $f_\psi(t) = 0.5\sin(0.15t + \pi/2)$ . Cada ángulo se inicializa en cero. La altitud tiene una referencia constante de 5 m y se inicializa en 4 m.

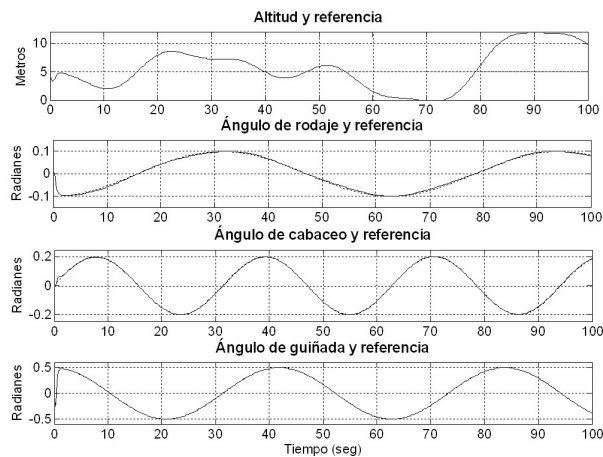


Figura 5.2: Seguimiento simultáneo de señales senoidales con los ángulos de orientación.

El seguimiento con los ángulos de orientación es bueno, sólo se observa una pequeña diferencia en el ángulo de rodaje, la cual se puede atribuir a que se simula en el sistema sin aproximación de funciones trigonométricas. Debido a lo mismo, no se logra que la altitud se mantenga en la referencia. El efecto de trabajar con ángulos de orientación

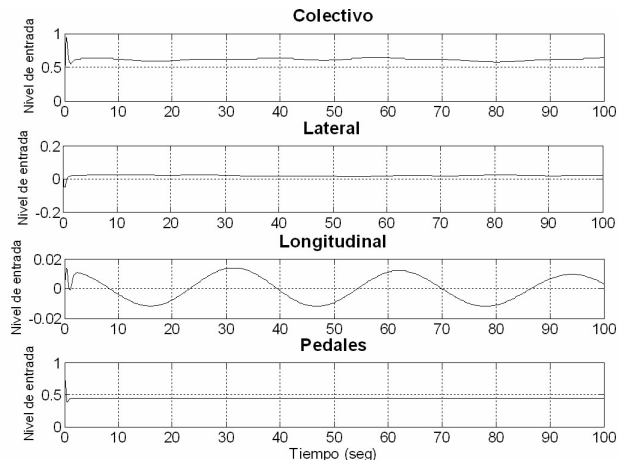


Figura 5.3: Entradas de control para el seguimiento de trayectoria con los ángulos de orientación.

fuera del rango de aproximación (menor de 0.1 rad) resulta en pérdida del control de altitud, independientemente de que la dinámica está desacoplada.

La figura 5.3 despliega las entradas de control que permiten seguir señales senoidales de forma independiente con los ángulos de orientación. Como es de esperarse, dichas entradas conducen a que las posiciones longitudinal y lateral diverjan sin control.

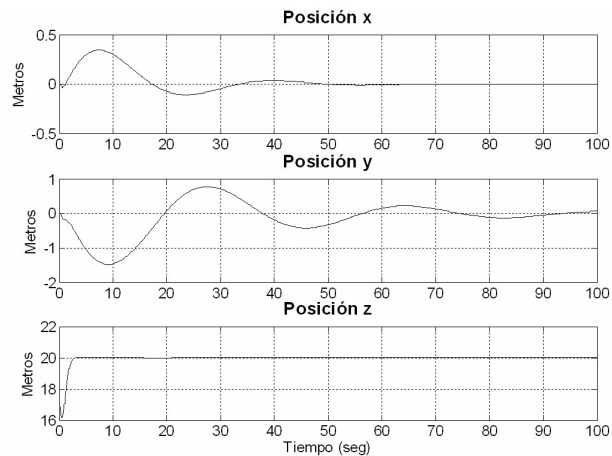


Figura 5.4: Control de posición inercial con  $z$  inicial en 17 m.

### Esquema de control completo

La figura 5.4 muestra el resultado del control de posición. La posición en  $z$  se inicializa en 17 m para que las entradas no lleguen a saturarse, ya que este tipo de control requiere

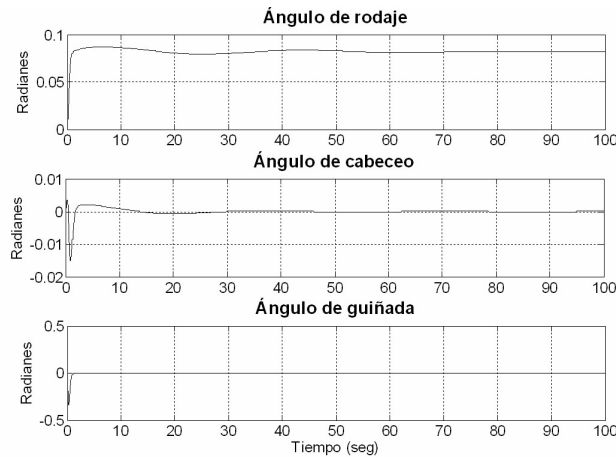


Figura 5.5: Ángulos de orientación para lograr el control en vuelo estacionario.

estrictamente las entradas que genera el controlador. En la figura se observa como la dinámica de las posiciones longitudinal y lateral se comporta de forma semejante a la obtenida con los controladores de los capítulos 3 y 4. Se obtienen buenos resultados, a pesar de que el controlador se diseña con la aproximación de funciones trigonométricas.

Los ángulos de orientación se comportan como se muestra en la figura 5.5. Los valores se mantienen dentro del rango permitido para cumplir la aproximación de funciones trigonométricas. Se observa que el ángulo de rodaje para el equilibrio es prácticamente igual al de casos anteriores. Finalmente las entradas que dirigen a la condición de vuelo estacionario se presentan en la figura 5.6, donde se observa que ninguna de ellas llega a saturarse.

En el caso anterior se logra alcanzar una referencia constante en altitud siempre que los ángulos de orientación de rodaje y cabeceo se mantengan pequeños, además de que las entradas de control no se saturen. La figura 5.7 despliega los resultados donde la altitud sigue una referencia  $f_z(t) = 20 + 15 \sin(0.1t)$  a partir de una condición inicial de 19 m. Las posiciones lateral y longitudinal tienen referencia cero y se inicializan en cero. El seguimiento para altitud es bueno; sin embargo, como en los demás esquemas de control, se observa el acoplamiento entre las dinámicas de altitud y movimiento lateral.

En la figura 5.8 se observan las dinámicas de los ángulos de orientación con los que se logra el control de posición anterior. El control del ángulo de guiñada es bueno; se mantiene en cero a pesar de las variaciones de altitud, es decir, las dinámicas de guiñada y altitud están desacopladas.

La figura 5.9 presenta las señales de entrada requeridas para lograr la condición de seguimiento senoidal para altitud y estabilización de las posiciones  $x - y$ .



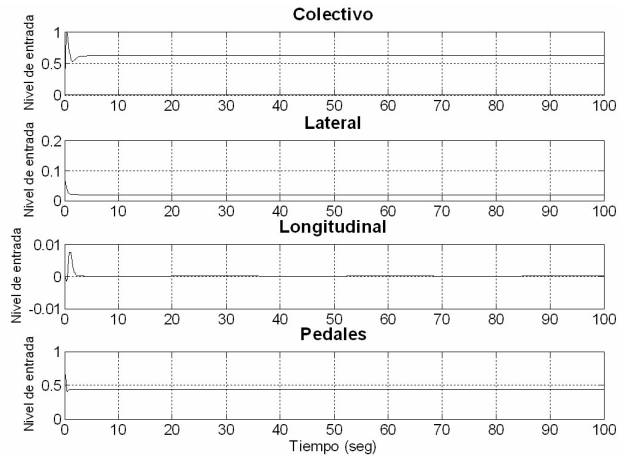


Figura 5.6: Entradas con las que se logra la condición de vuelo estacionario.

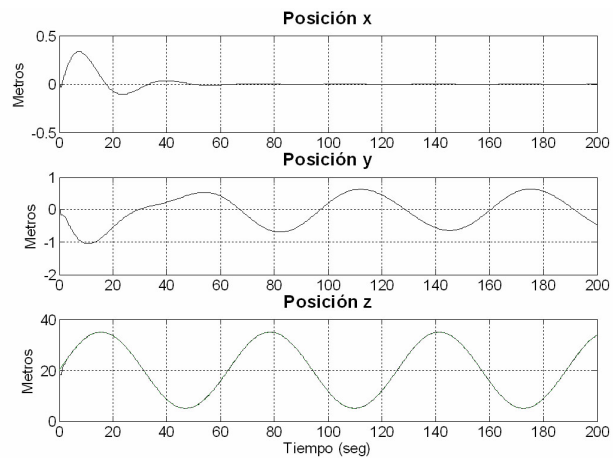


Figura 5.7: Seguimiento de una señal senoidal para altitud.

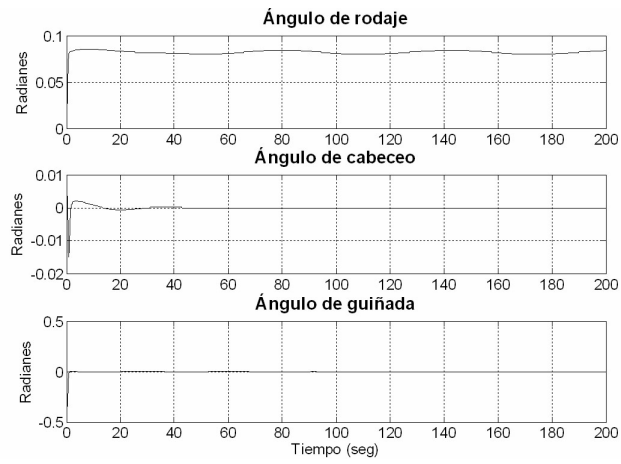


Figura 5.8: Ángulos de orientación para lograr seguir una señal senoidal para altitud.

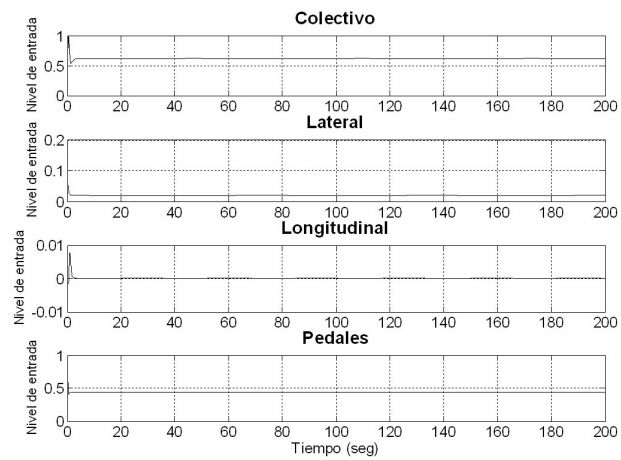


Figura 5.9: Entradas de control para seguimiento de una señal senoidal para altitud.

### 5.3.2. Comparación con trabajos previos

No fue posible obtener ningún resultado favorable con la aplicación del sistema de control no lineal aproximado sobre el modelo completo que se describe en el segundo capítulo. Se probó este sistema de control sobre el modelo completo sin éxito, aún con inicialización de los estados para la condición de vuelo estacionario. La linealización entrada-salida es una técnica de control no robusta, ya que se basa en el conocimiento exacto de la planta. Al simplificar el modelo del helicóptero por uno que lo aproxima para vuelo estacionario, existen dinámicas no modeladas que hacen que la linealización no sea exacta, y consecuentemente el control se pierde.

El sistema de control propuesto en este capítulo se puede comparar con el trabajo reportado en [8], donde se aplica linealización exacta y aproximada por realimentación del estado sobre un modelo matemático de helicóptero válido para vuelo estacionario. En dicho trabajo se consideran como salidas, las posiciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y el ángulo de guiñada  $\psi$ . Al aplicar la linealización exacta se asegura que esta falla al transformar el sistema completo en uno lineal controlable, ya que se obtiene una dinámica cero condicionalmente estable. La linealización aproximada consiste en simplificar el modelo al despreciar algunos términos de acoplamiento. Con esto se consigue transformar al sistema, después de una extensión dinámica, a un sistema lineal controlable sin dinámica cero.

Con el modelo simplificado del mini-helicóptero X-Cell que se presenta en este capítulo, y considerando como salidas la altitud y los ángulos de orientación, se obtiene un sistema lineal controlable sin dinámica cero, después de hacer también una extensión dinámica. Este modelo es más completo que el utilizado en [8], ya que se consideran dinámicas adicionales como las del rotor y de los actuadores, mientras que en el trabajo mencionado sólo se trabaja con la dinámica de cuerpo rígido. Incluso, el modelo matemático de este capítulo es más completo que el utilizado en [7]. El resultado que se presenta en [8] sólo es la estabilización de las posiciones a partir de condiciones iniciales muy cercanas.

El controlador no lineal de este capítulo se prueba para condiciones iniciales no muy lejanas a la referencia para evitar saturación de los actuadores; sin embargo, se puede incluir control por modos deslizantes para utilizar entradas acotadas. Una ventaja del sistema de control propuesto, y que también se tiene en el sistema de [8], es que se desacoplan las dinámicas de altitud y guiñada.

Para hacer seguimiento asintótico de una referencia utilizando linealización de entrada-salida se requiere conocer la referencia, ya que sus derivadas se incorporan en la ley de control. Para seguir las referencias dadas por los controladores difusos, se trabajan como referencias constantes, de esta manera, con una buena rapidez en la reducción del error se obtienen resultados adecuados. Lo mismo sucede en los esquemas anteriores, donde los controladores PID reducen el error entre los ángulos de orientación deseados y los actuales.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis se presentaron tres diferentes sistemas de control para un mini-helicóptero X-Cell, probados todos en simulación. En cada uno de ellos se combinan diferentes técnicas de control. Los tres sistemas de control están diseñados con base en la misma filosofía de control, la cual imita la acción de un piloto humano. La teoría de control común para todos los esquemas propuestos es la lógica difusa.

El primer esquema de control está compuesto de cuatro controladores SISO PID que realizan el control de altitud y orientación, y dos controladores difusos tipo Mamdani que establecen las referencias para dos de los controladores PID. Estos PID controlan los ángulos de rodaje y cabeceo, con lo que se logra dirigir el movimiento del vehículo tal como lo hace un piloto humano. El desempeño de este esquema de control es adecuado para vuelo estacionario, ya que logra despegar al helicóptero y posicionarlo en un punto deseado del espacio tridimensional. Bajo este esquema, también se puede seguir una señal senoidal para altitud con resultados adecuados, aún ante perturbaciones de viento representadas por ruido blanco.

Este sistema de control es comparable con el presentado en [12], ya que ambos utilizan la teoría de control clásico. El controlador de vuelo del trabajo citado está constituido sólo por controladores P y PD, y se prueba en un modelo matemático lineal estrictamente válido para vuelo estacionario. Desde el punto de vista del control inteligente, el controlador propuesto en esta tesis se puede comparar con [19], donde también se utilizan dos controladores de Mamdani que regulan el movimiento lateral y longitudinal; sin embargo, los diseñados en esta tesis son más sencillos: 9 reglas para cada controlador a diferencia de las 25 propuestas por Sugeno. Además, en [19] se utiliza aceleración y velocidad como entradas a los controladores, a diferencia de velocidad y posición que se propone en esta tesis. Una ventaja del trabajo de Sugeno es que el controlador difuso para guiñada permite manipular este ángulo de orientación al momento de hacer una vuelta sin provocar problemas de funcionamiento en los controladores lateral y longitudinal, debido a que se implementa un controlador de Mamdani para compensar los acoplamientos. En el presente trabajo sólo se aborda el desacoplamiento de dinámicas en el tercer esquema de control propuesto. En general, el sistema de control inteligente híbrido difuso y PID es sencillo, con la ventaja de que la metodología para su diseño no se basa en el modelo, lo que puede

facilitar su implementación en tiempo real.

En un segundo esquema de control se propone mejorar las características de seguimiento de trayectoria del sistema anterior. Para ello se sustituyen los dos controladores PID que controlan la dinámica de altitud y ángulo de guiñada por un regulador lineal multivariable. En este caso, se adapta el modelo matemático para ser linealizado en cualquier punto de operación con el uso de Matlab. A partir de los resultados de linealización, se obtiene un sistema controlable para la condición de vuelo estacionario, el cual tiene la particularidad de ser el mismo para cualquier posición  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Para mantener la estructura del primer esquema de control, a partir del sistema lineal obtenido se toma un subsistema de cuatro variables de estado con el que se diseña el regulador. De acuerdo a los resultados obtenidos, el regulador mejora el desempeño en el seguimiento de la señal senoidal para altitud, también ante presencia de perturbaciones de viento. Esto sin necesidad de aplicar técnicas de combinación de controladores como Takagi-Sugeno, debido a que el modelo lineal es único para cualquier posición inercial. Cabe mencionar que al igual que en la primera propuesta, los sistemas de control se aplican sobre el modelo matemático más completo que existe en la actualidad para representar un mini-helicóptero.

El esquema de control propuesto en el segundo capítulo se puede comparar al utilizado en [7]. El controlador de altitud y postura presentado en dicho trabajo es capaz de hacer seguimiento de trayectoria simultáneo con los ángulos de orientación; se logra porque se trabaja con un modelo desacoplado del helicóptero al despreñar algunos términos. El modelo matemático en dicho trabajo es válido sólo para vuelo estacionario. Al seguir una señal senoidal existe un error de estado estacionario persistente en altitud y en los ángulos de orientación. [7] es uno de los pocos trabajos que reportan seguimiento de trayectoria en altitud, y al comparar los resultados con el control inteligente híbrido difuso, PID y regulación, este último tiene mejor desempeño. En esta tesis y en el trabajo citado, se simula el gasto de combustible y la presencia de perturbaciones de viento sin afectar el desempeño del sistema en forma significativa. Una ventaja del sistema de control en [7] es la posibilidad de manipular el ángulo de guiñada.

El último sistema de control mantiene la estructura de los anteriores, pero utiliza un controlador no lineal en sustitución de los controladores de altitud y orientación. Es difícil trabajar con técnicas no lineales tales como linealización de entrada-salida. Por ello, no fue posible aplicar este esquema sobre el modelo completo del sistema. Se propone entonces un modelo simplificado, representativo de la condición de vuelo estacionario y con base en él, se diseña un estabilizador por realimentación del estado del sistema de error. Con este sistema de control se logró la condición de vuelo estacionario con el modelo reducido, no así sobre el modelo completo. Este resultado era de esperarse debido a la falta de robustez de este tipo de controladores en presencia de dinámicas no modeladas.

El modelo matemático simplificado que se propone en esta tesis es más completo que los utilizados en [7] y [8]. En este último artículo, se aplica linealización exacta y aproximada por realimentación del estado sobre un modelo matemático de helicóptero que es válido para vuelo estacionario. En dicho trabajo se consideran como salidas las posiciones y el ángulo de guiñada. Al aplicar la linealización exacta se obtiene un sistema con dinámica cero condicionalmente estable. La linealización aproximada consiste en simplificar el modelo al

despreciar algunos términos de acoplamiento. Con esto se consigue transformar a un sistema lineal controlable sin dinámica cero. Con el modelo simplificado del mini-helicóptero X-Cell que se presenta en el quinto capítulo, y considerando como salidas la altitud y los ángulos de orientación, se obtiene un sistema lineal controlable, sin dinámica cero al incluir una extensión dinámica. El resultado que se presenta en [8] sólo es la estabilización de las posiciones con valores muy cercanos a  $(0, 0, 0)$ , y con las demás condiciones iniciales en sus valores de equilibrio; en cambio en el presente trabajo, el sistema se puede inicializar con valores distintos a los de equilibrio y no se requiere una posición inicial tan cercana a la referencia.

Como trabajo futuro se propone tratar con los problemas de acoplamiento entre dinámicas, la inclusión de un sistema de control de velocidad, además de los de posicionamiento presentados en esta tesis. Es decir, se propone llegar a una posición de referencia en el espacio tridimensional realizando un recorrido a una velocidad deseada. Además, se puede agregar un controlador para compensar el efecto de manipular el ángulo de guiñada que evite afectar el funcionamiento de los controladores difusos lateral y longitudinal. De esta manera, se puede lograr el seguimiento de una trayectoria circular con un desplazamiento siempre hacia adelante.



# Bibliografía

- [1] K. J. Astrom and T. Hagglund, *PID Controllers: theory, design, and tuning*, second edition, International Society for Measurement and Control, Research Triangle Park, NC., USA, 1995.
- [2] B. A. Francis, “The linear multivariable regulator problem”. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 14, pp. 486-505, 1977.
- [3] J. Garrido, “Seguimiento de trayectorias para un manipulador robótico por medio de control difuso tipo Takagi-Sugeno”. Tesis de maestría, CINVESTAV-GDL, México, 2003.
- [4] V. Gavrillets, B. Mettler and E. Feron, “Dynamic model for a miniature aerobatic helicopter”. Report of the Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, Cambridge, USA, 2004.
- [5] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, third edition, Springer, London, Great Britain, 1995.
- [6] B. Kadmiry and D. Driankov, “A fuzzy gain-scheduler for the attitude control of an unmanned helicopter”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 12, No. 4, August 2004.
- [7] B. Kadmiry and D. Driankov, “A fuzzy flight controller combining linguistic and model-based fuzzy control”, *Int. J. Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 146, No. 3, September 2004.
- [8] T. Koo and S. Sastry, “Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization”, in *Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC'98)*, pp. 3635–3640, Tampa, FL., USA, Dec. 1998.
- [9] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ., USA, 1980.
- [10] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [11] M. Maldonado, “Seguimiento de trayectoria utilizando control difuso tipo Takagi-Sugeno”. Tesis de maestría, CINVESTAV-GDL, México, 1999.



- [12] B. Mettler, *Identification Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA., USA, 2003.
- [13] H. W. Knobloch, A. Isidori, and D. Flockerzi. *Topics in Control Theory*. Birkhauser, Boston, USA, 1993.
- [14] L. A. Nuño, “Control PD difuso aplicado a robots”. Tesis de maestría, CINVESTAV-GDL, México, 1998.
- [15] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, third edition, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1997.
- [16] K. M. Passino and S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, Addison Wesley, Menlo Park, California, USA, 1998.
- [17] P. Sánchez, “Control de un PVTOL por medio de la técnica Takagi-Sugeno”. Tesis de maestría, CINVESTAV-GDL, México, 2003.
- [18] S. Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, Springer-Verlag, New York, USA, 1999.
- [19] M. Sugeno, “Development of an intelligent unmanned helicopter”, *Fuzzy Modeling and Control, Selected Works of M. Sugeno*, T. H. Nguyen and N. R. Prasad (Eds.), CRC Press, pp. 13–43, Boca Raton, FL., USA, 1999.
- [20] L. X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ., USA, 1997.
- [21] [www.control-systems.net/colibri.htm](http://www.control-systems.net/colibri.htm)
- [22] [www.thai-technics.com](http://www.thai-technics.com)
- [23] Ayuda de Matlab v7.0
- [24] Guía de usuario de AeroSim Blockset.

# Apéndice A

## Parámetros del sistema

Este apéndice incluye la tabla de valores de los parámetros del mini-helicóptero X-Cell 60 SE.

Parámetro	Descripción
$m = 8.2 \text{ kg}$	Masa del helicóptero
$I_{xx} = 0.18 \text{ kg m}^2$	Momento de inercia de rodaje
$I_{yy} = 0.34 \text{ kg m}^2$	Momento de inercia de cabeceo
$I_{zz} = 0.28 \text{ kg m}^2$	Momento de inercia de guiñada
$K_{\beta} = 54 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$	Rigidez torsional de la cabeza del rotor
$f_b = 0.8$	Numero de Lock de la barra estabilizadora
$B_{\delta_{lat}}^{nom} = 4.2 \text{ rad/rad}$	Ganancia del cíclico lateral al batimiento en rpm nominal
$A_{\delta_{lon}}^{nom} = 4.2 \text{ rad/rad}$	Ganancia del cíclico longitudinal al batimiento en rpm nominal
$K_{\mu} = 0.2$	Escalamiento de la respuesta de batimiento para variaciones de velocidad
$\Omega_{nom} = 167 \text{ rad/s}$	Velocidad nominal del rotor principal (r. p.)
$R_{mr} = 0.775 \text{ m}$	Radio del r. p.
$c_{mr} = 0.058 \text{ m}$	Longitud transversal de las aspas del r. p.
$a_{mr} = 5.5 \text{ rad}^{-1}$	Pendiente de la curva de las aspas del r. p.
$C_{D_0}^{mr} = 0.024$	Coefficiente de resistencia de las aspas del r. p.
$C_{T_{max}}^{mr} = 0.0055$	Coefficiente de empuje máximo del r. p.
$I_{\beta_{mr}} = 0.038 \text{ kg m}^2$	Inercia en el batimiento de las aspas del r. p.
$R_{tr} = 0.13 \text{ m}$	Radio del rotor de cola (r. c.)
$c_{tr} = 0.029 \text{ m}$	Longitud transversal de las aspas del r. c.
$a_{tr} = 5.0 \text{ rad}^{-1}$	Pendiente de la curva de las aspas del r. c.
$C_{D_0}^{tr} = 0.024$	Coefficiente de resistencia de las aspas del r. c.
$C_{T_{max}}^{mr} = 0.05$	Coefficiente de empuje máximo del r. c.
$n_{tr} = 4.66$	Relación de engranaje del r. p. al r. c.
$n_{es} = 9.0$	Relación de engranaje del eje del motor al r. p.
$\delta_r^{trim} = 0.1 \text{ rad}$	Desbalance de equilibrio del r. c.

Parámetro	Descripción
$S_{vf} = 0.012 \text{ m}^2$	Área efectiva de la aleta vertical
$C_{L\alpha}^{vf} = 2.0 \text{ rad}^{-1}$	Pendiente de la curva de la aleta vertical
$\epsilon_{vf}^{tr} = 0.2$	Fracción de la aleta vertical expuesta a la velocidad inducida del r. c.
$S_{ht} = 0.01 \text{ m}^2$	Área de la cola horizontal
$C_{L\alpha}^{ht} = 3.0 \text{ rad}^{-1}$	Pendiente de la curva de la cola horizontal
$P_{eng}^{idle} = 0.0 \text{ Watts}$	Potencia del motor inactivo
$P_{eng}^{m\acute{a}x} = 2000.0 \text{ Watts}$	Potencia máxima del motor
$K_p = 0.01 \text{ sec/rad}$	Ganancia proporcional del gobernador de velocidad
$K_i = 0.02 \text{ rad}^{-1}$	Ganancia integral del gobernador de velocidad
$S_x^{fus} = 0.1 \text{ m}^2$	Área de resistencia frontal del fuselaje
$S_y^{fus} = 0.22 \text{ m}^2$	Área de resistencia lateral del fuselaje
$S_z^{fus} = 0.15 \text{ m}^2$	Área de resistencia vertical del fuselaje
$h_{mr} = 0.235 \text{ m}$	Altura de la cabeza del r. p. sobre el c. g.
$l_{tr} = 0.91 \text{ m}$	Localización de la cabeza del r. c. atrás del c. g.
$h_{tr} = 0.08 \text{ m}$	Altura del r. c. sobre el c. g.
$l_{ht} = 0.71 \text{ m}$	Localización de la cola horizontal atrás del c. g.
$\rho = 1 \text{ kg/m}^3$	Densidad del aire
$\delta_r^{nom} = 0.55$	Entrada nominal de la válvula de combustible

# Apéndice B

## Código de Maple

Este apéndice presenta el código de Maple utilizado para 1) el cálculo de la condición de equilibrio y 2) el cálculo de las matrices del regulador lineal.

### Código para el cálculo de la condición de equilibrio

```
> u := 0: v := 0: w := 0: p := 0: q := 0: r := 0: m := 8.2: rho := 1: Omega := 167:
> Ix := 0.181: Iy := 0.341: Iz := 0.281: Rmr := 0.775: Rtr := 0.13: a_tr := 5:
> a_mr := 5.5: c_tr := 0.029: c_mr := 0.058: h_mr := 0.235: n_tr := 4.66:
> h_tr := 0.08: l_tr := 0.91: l_ht := 0.71: g := 9.8: evf := 0.2: gamma_fb := 0.8:
> A_dlon_nom := 4.2: B_dlon_nom := 4.2: Sx := 0.1: Sy := 0.22: Sz := 0.15:
> Svf := 0.012: Sht := 0.01: Cvf := 2: Cht := 3: k_col := 0.183: k_ped := 0.38:
> k_beta := 54: gi := evalf((l_tr - Rmr - Rtr)/h_tr): gf := evalf((l_tr - Rmr +
Rtr)/h_tr):
> k_lam := 1.5*(u/(Vi-w) - gi)/(gf - gi):
> if (k_lam < 0) then k_lambda := 0: end if:
> cte := evalf(Pi):
> ft := 1 - 3*Svf/(4*cte*Rtr^2): tao_e := 16/(gamma_fb*Omega):
> sigma_mr := 2*c_mr/(cte*Rmr): sigma_tr := 2*c_tr/(cte*Rtr):
> w_tr := w+l_tr*q-k_lambda*Vimr: v_tr := v-l_tr*r+h_tr*p:
> v_vf := v-evf*Vitr-l_tr*r: w_ht := w-l_ht*q-k_lambda*Vimr:
> miu_mr := sqrt((u^2+v^2))/(Omega*Rmr): miu_z_mr := w/(Omega*Rmr):
> miu_tr := sqrt((u^2+w_tr^2))/(n_tr*Omega*Rtr):
> miu_z_tr := v_tr/(n_tr*Omega*Rtr):
> CT_mr := (a_mr*sigma_mr/2)*(k_col*col*(1/3+miu_mr^2/2) +. (miu_z_mr-
lamda_mr)/2):
> CT_tr := (a_tr*sigma_tr/2) * (k_ped*ped*(1/3+miu_tr^2/2) +. (miu_z_tr-
lamda_tr)/2):
> k1 := rho*(Omega*Rmr)^2*cte*Rmr^2: k2 := 0.5*rho*Sx: k3 := 0.5*rho*Sy:
> k4 := ft*rho*(n_tr*Omega*Rtr)^2*cte*Rtr^2: k5 := 0.5*rho*Svf: k6 := 0.5*rho*Sz:
> k7 := 0.5*rho*Sht: k8 := (Iy-Iz)/Ix: k9 := 1/Ix: k10 := (Iz-Ix)/Iy: k11 := 1/Iy:
```

```

> k12 := (Ix-Iy)/Iz: k13 := 1/Iz:
> Fg := matrix(3,1,[-g*sin(theta),g*sin(phi)*cos(theta),g*cos(phi)*cos(theta]):
> Fcor := matrix(3,1,[v*r-w*q,w*p-u*r,u*q-v*p]):
> Fmr := matrix(3,1,[-k1*CT_mr*a1,k1*CT_mr*b1,-k1*CT_mr]):
> Ffus := matrix(3,1,[-k2*u*sqrt(u^2+v^2+(w+Vimr)^2),-k3*v*sqrt(u^2+v^2+(w+Vimr)^2),-
k6*(w+Vimr)*sqrt(u^2+v^2+(w+Vimr)^2)]:
> Ftr := matrix(3,1,[0,-k4*CT_tr,0]):
> Fvf := matrix(3,1,[0,-k5*(Cvf*sqrt(u^2+w_tr^2)+abs(v_vf))*v_vf,0]):
> Fht := matrix(3,1,[0,0,k7*(Cht*abs(u)+abs(w_ht))*w_ht]):
> Mgir := matrix(3,1,[k8*q*r,k10*p*r,k12*p*q]):
> Mmr := matrix(3,1,(k_beta+k1*CT_mr*h_mr)*[b1,a1,0]):
> Mtr := matrix(3,1,k4*CT_tr*[-h_tr,0,1_tr]):
> Mvf := matrix(3,1,k5*(Cvf*sqrt(u^2+w_tr^2)+abs(v_vf))*v_vf*[-h_tr,0,1_tr]):
> Mht := matrix(3,1,k7*(Cht*abs(u)+abs(w_ht))*w_ht*[0,1_ht,0]):
> eqs:={Fg[1,1]+Fcor[1,1]+Fmr[1,1]+Ffus[1,1]+Ftr[1,1]+Fvf[1,1]+Fht[1,1]=0,
Fg[2,1]+Fcor[2,1]+Fmr[2,1]+Ffus[2,1]+Ftr[2,1]+Fvf[2,1]+Fht[2,1]=0,
Fg[3,1]+Fcor[3,1]+Fmr[3,1]+Ffus[3,1]+Ftr[3,1]+Fvf[3,1]+Fht[3,1]=0,
Mgir[1,1]+Mmr[1,1]+Mtr[1,1]+Mvf[1,1],Mht[1,1]=0,
Mgir[2,1]+Mmr[2,1]+Mtr[2,1]+Mvf[2,1],Mht[2,1]=0,
Mgir[3,1]+Mmr[3,1]+Mtr[3,1]+Mvf[3,1],Mht[3,1]=0}:
> eqs1:=solve(eqs):
> assign(eqs1):
> print(a1): print(b1): print(phi): print(theta): print(col): print(ped):

```

### Código para el cálculo de las matrices del regulador lineal

```

> with(linalg): Digits:=10:
> Ao:=matrix(4,4,[-0.7985,0,0,0,-0.8290,0,0,0,0.9968,0,0,-0.9968,0,0,0]):
> B:=matrix(4,2,[-21.0812,0,0,43.5170,0,0,0,0]):
> C:=matrix(2,4,[0,0,1,0,0,0,0,1]):
> Valo:=evalf(Eigenvals(Ao)):
> K:=matrix(2,4,[-0.4631,-0.0155,-0.0003,0.2399,0.0063,0.2783,0.2743,0.0064]):
> Ac:=evalm(Ao-B&K):
> Valc:=evalf(Eigenvals(Ac)):
> PI:=matrix(4,3,[]):
> GAMA:=matrix(2,3,[]):
> P:=matrix(4,3,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]):
> cte:=20: am:=15:
> R:=matrix(2,3,[0,0,0,cte,am,0]):
> alfa:=0.1:
> S:=matrix(3,3,[0,0,0,0,0,alfa,0,-alfa,0]):
> Af:=Ao:

```

```

> mat:=evalm(PI&*S): mat1:=evalm(Af&*PI+B&*GAMA+P): mat2:=evalm(C&*PI):
mat3:=evalm(R):
> eqs:={mat[1,1]=mat1[1,1],mat[1,2]=mat1[1,2],mat[1,3]=mat1[1,3],
mat[2,1]=mat1[2,1],mat[2,2]=mat1[2,2],mat[2,3]=mat1[2,3],mat[3,1]=mat1[3,1],
mat[3,2]=mat1[3,2],mat[3,3]=mat1[3,3],mat[4,1]=mat1[4,1],mat[4,2]=mat1[4,2],
mat[4,3]=mat1[4,3],mat2[1,1]=mat3[1,1],mat2[1,2]=mat3[1,2],mat2[1,3]=mat3[1,3],
mat2[2,1]=mat3[2,1],mat2[2,2]=mat3[2,2],mat2[2,3]=mat3[2,3]}:
> eqs1:=solve(eqs):
> assign(eqs1);
> print(PI):
> print(GAMA):
> print(P):
> evalm(Af&*PI+B&*GAMA+P-PI&*S);
> evalm(C&*PI-R);

```



# Apéndice C

## Código de Matlab

En este apéndice se incluye el código de Matlab para: 1) definición de propiedades de los controladores de Mamdani y 2) linealización del sistema.

### Código del controlador longitudinal

El siguiente código define el controlador de la posición longitudinal:

```
[System]
Name='XFuz'
Type='mamdani'
Version=2.0
NumInputs=2
NumOutputs=1
NumRules=9
AndMethod='prod'
OrMethod='max'
ImpMethod='prod'
AggMethod='sum'
DefuzzMethod='centroid'
[Input1]
Name='x'
Range=[-60 60]
NumMFs=3
MF1='x1':'trapmf',[-60 -60 -5 0]
MF2='x2':'trimf',[-5 0 5]
MF3='x3':'trapmf',[0 5 60 60]
[Input2]
Name='Vx'
Range=[-10 10]
NumMFs=3
MF1='Vx1':'trapmf',[-10 -10 -2.5 0]
```



```

MF2='Vx2':trimf,[-2.5 0 2.5]
MF3='Vx3':trapmf,[0 2.5 10 10]
[Output1]
Name='theta'
Range=[-0.12 0.12]
NumMFs=9
MF1='s1':trimf,[-0.11 -0.1 -0.09]
MF2='s2':trimf,[-0.05 -0.04 -0.03]
MF3='s3':trimf,[-0.015 -0.005 0.005]
MF4='s4':trimf,[-0.03 -0.02 -0.01]
MF5='s5':trimf,[-0.01 0 0.01]
MF6='s6':trimf,[0.01 0.02 0.03]
MF7='s7':trimf,[-0.005 0.005 0.015]
MF8='s8':trimf,[0.03 0.04 0.05]
MF9='s9':trimf,[0.09 0.1 0.11]
[Rules]
1 1, 1 (1) : 1
2 1, 2 (1) : 1
3 1, 3 (1) : 1
1 2, 4 (1) : 1
2 2, 5 (1) : 1
3 2, 6 (1) : 1
1 3, 7 (1) : 1
2 3, 8 (1) : 1
3 3, 9 (1) : 1

```

### Código del controlador lateral

El siguiente código define el controlador de la posición lateral:

```

[System]
Name='YFuz'
Type='mamdani'
Version=2.0
NumInputs=2
NumOutputs=1
NumRules=9
AndMethod='prod'
OrMethod='max'
ImpMethod='prod'
AggMethod='sum'
DefuzzMethod='centroid'
[Input1]
Name='y'

```

```

Range=[-60 60]
NumMFs=3
MF1='y1':'trapmf',[-60 -60 -5 0]
MF2='y2':'trimf',[-5 0 5]
MF3='y3':'trapmf',[0 5 60 60]
[Input2]
Name='Vy'
Range=[-10 10]
NumMFs=3
MF1='Vy1':'trapmf',[-10 -10 -2.5 0]
MF2='Vy2':'trimf',[-2.5 0 2.5]
MF3='Vy3':'trapmf',[0 2.5 10 10]
[Output1]
Name='phi'
Range=[-0.06 0.06]
NumMFs=9
MF1='s1':'trimf',[-0.06 -0.05 -0.04]
MF2='s2':'trimf',[-0.03 -0.02 -0.01]
MF3='s3':'trimf',[-0.018 -0.008 0.002]
MF4='s4':'trimf',[-0.025 -0.015 -0.005]
MF5='s5':'trimf',[-0.01 0 0.01]
MF6='s6':'trimf',[0.005 0.015 0.025]
MF7='s7':'trimf',[-0.002 0.008 0.018]
MF8='s8':'trimf',[0.01 0.02 0.03]
MF9='s9':'trimf',[0.04 0.05 0.06]
[Rules]
1 1, 9 (1) : 1
2 1, 8 (1) : 1
3 1, 7 (1) : 1
1 2, 6 (1) : 1
2 2, 5 (1) : 1
3 2, 4 (1) : 1
1 3, 3 (1) : 1
2 3, 2 (1) : 1
3 3, 1 (1) : 1

```

### Código para linealización del sistema

El siguiente código permite linealizar el sistema y trabajar la regulación con el sistema de cuatro estados:

```

%Definición de punto de operación:
u = 0; v = 0; w = 0;
p = 0; q = 0; r = 0;

```

```

phi = 0.07988; theta = 0; psi = 0;
x = 0; y = 0; z = 20;
a1 = 0; b1 = 0.0076667;
col = 0.6083; lon = 0; lat = 0.01902; ped = 0.4247;
state_op = [u v w p q r phi theta psi x y z a1 b1];
in_op = [col lon lat ped];
[A,B,C,D]=linmod('model2linearization',state_op,in_op);
C = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0];
D = [0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0];
%Prueba de controlabilidad:
Cont_com = ctrb(A,B);
bad_rank=rank(Cont_com);
%La prueba de rango de la matriz total resulta ser 4
real_rank = rank(Cont_com(:,1:14));
%Las primeras 14 columnas en realidad son linealmente independientes.
%Definición del sistema reducido:
Ar = [A(3,3) A(3,6) A(3,9) A(3,12); A(6,3) A(6,6) A(6,9) A(6,12);
A(9,3) A(9,6) A(9,9) A(9,12); A(12,3) A(12,6) A(12,9) A(12,12)];
Br = [B(3,1) B(3,4); B(6,1) B(6,4); B(9,1) B(9,4); B(12,1) B(12,4)];
Cont_red=ctrb(Ar,Br);
Cr = [0 0 1 0; 0 0 0 1];
Kr = place(Ar,Br,[-0.5 -12 -10 -1]);
Kr = [Kr(:,1:3) -Kr(:,4)];
%Las siguientes matrices hacen el seguimiento constante.
Alt = 5; Amp = 0; alfa = 0.05;
GAMA = [0 0 0; 0 0 0];
PIS = [0 0 0; 0 0 0; 0 0 0; Alt 0 0];
%Las siguientes matrices hacen el seguimiento senoidal.
%Alt = 20; Amp = 15; alfa = 0.1;
%GAMA = [0 -0.7138186675e-2 0.5699842060e-1; 0 0 0];
%PIS = [0 0 -1.504815409; 0 0 0; 0 0 0; 20 15 0];
R = [0 0 0; Alt Amp 0];
S = [0 0 0; 0 0 alfa; 0 -alfa 0];

```

### Código para reubicación de valores propios

El siguiente código permite hacer la reubicación de valores propios del sistema completo una vez linealizado el sistema:

```

K = place(A,B,[-15 -1 -1 -2 -2 -2 -5 -5 -5 -8 -8 -8 -10 -10]);
K = [K(:,1:11) -K(:,12) K(:,13:14)]; %Se requiere cuando se prueba en el sistema sin
simplificar.

```

# Apéndice D

## Artículos

- Becerra H., Sánchez E., Vélez C., “Combining fuzzy, PID and regulation control for an autonomous mini-helicopter”, submitted to Information Science, 2005.
- Becerra H., Sánchez E., Vélez C., “Combining fuzzy and PID control for an unmanned helicopter”, NAFIPS 2005, Ann Arbor, MI, USA, junio, 2005.
- Becerra H., Sánchez E., Vélez C., “Combining fuzzy, PID and regulation control for an unmanned helicopter”, ISCI 2005, DF, México, octubre, 2005.



## Soft Computing for Real World Applications

Ann Arbor, Michigan, June 22-25, 2005

**Friday, June 24, 2005, 08:00AM – 9:30AM**

### Plenary Session II

8:00 AM *Soft Computing for Intelligence Analysis and Security Decisions*  
Ronald R. Yager

8:45 AM *OWA Operators for Gene Product Similarity, Clustering, and Knowledge Discovery*  
James M. Keller

**Friday, June 24, 2005, 09:40AM – 10:55AM**

### FAM11 - Special Session on Hybrid Intelligent Systems Using Soft Computing I, Chairs: Oscar Castillo and Patricia Mellin, Room: Petit I

09:40AM *Combining Fuzzy and PID Control for an Unmanned Helicopter*  
Edgar N. Sanchez, Hector M. Becerra and Carlos M. Velez

10:05AM *Image Complexity Measure: A Human Criterion Free Approach*  
Mario Chacon and Alma Corral

10:30AM *Evolutionary Computing for Optimizing Type-2 Fuzzy Systems in Intelligent Control of Non-Linear Dynamic Plants*  
Oscar Castillo, Gabriel Huesca and Fevrier Valdez

# Combining fuzzy and PID control for an unmanned helicopter

Edgar N. Sanchez

CINVESTAV, Unidad Guadalajara  
Apartado Postal 31-438. Plaza la Luna.  
Guadalajara, Jalisco, Mexico. C. P. 45091  
Email: sanchez@gdl.cinvestav.mx

Hector M. Becerra

CINVESTAV, Unidad Guadalajara  
Apartado Postal 31-438. Plaza la Luna.  
Guadalajara, Jalisco, Mexico. C. P. 45091  
Email: hbecerra@gdl.cinvestav.mx

Carlos M. Velez

Universidad EAFIT.  
Carrera 49 No. 7 Sur 50.  
Medellin, Colombia, South America.  
E-mail: cmvelez@eafit.edu.co

**Abstract**—This paper reports the synthesis of a controller for the X-Cell mini-helicopter. It is developed on basis of the most realistic mathematical model actually available [1]. A combined control structure is proposed: Mamdani controllers keep set points for an altitude/attitude controller. These controllers are designed in the simplest rule base. Altitude/attitude controller is constituted for conventional SISO PID controllers for z-position and roll, pitch and yaw angles. This control scheme mimics the action of an expert pilot. The proposed scheme is tested via simulations; it presents a good performance for hover flight, and control position in slow speed.



Fig. 1. X-Cell mini-helicopter.

## I. INTRODUCTION

The research reported in this paper is a contribution to the overall objective of the Colibri project [6]: Design, implementation and experimentation of a control system for a mini-helicopter robot. The Colibri project is one of the most important research projects under development in Colombia, South America.

Helicopter control requires first, to guarantee stability at different points to hold the helicopter in a desired trim state; and second, to change the helicopter velocity, position and orientation in order to track a desired trajectory. In mini-helicopters this is usually done through a remote control by a human pilot.

The particular problem addressed in this paper is the synthesis of a control structure to reproduce the pilot action in its simplest form. So, an altitude and attitude (roll, pitch, and yaw) controller which achieves stable behavior for an unmanned helicopter must be designed. The flight control structure proposed in this paper is tested in simulation using a nonlinear multiple-input–multiple-output (MIMO) model of a real unmanned helicopter platform, the X-Cell. The simulation model is implemented on basis of the mathematical model proposed in [1], which is the most realistic model actually available for this mini-helicopter.

The paper is organized as follows. Section II briefly introduces the mathematical model used. Section III presents the control structure. Section IV discusses simulation results, displaying how simplicity in the control designed is achieved. Finally, Section V provides relevant conclusions.

## II. MATHEMATICAL MODEL

The platform for research is an X-Cell mini-helicopter, which is shown in Fig 1. This helicopter is part of the Colibri project. X-Cell is a representative vehicle for today research. It is highly maneuverable as a result from its stiff rotor head, allowing the transmission of large control moments from the rotor to the fuselage, a large thrust-to-weight ratio, and a fast rotor speed. It is equipped with a powerful engine and an electronic governor for maintaining a near constant rotor speed. Like most miniature helicopters, it is also equipped with a stabilizer bar, which acts like a lagged attitude rate feedback, and is designed to help the remote human pilot to control attitude dynamics. As an activity of the Colibri project, a X-Cell helicopter is being instrumented to performance autonomous flight in real time.

The X-Cell mathematical model is based on [1]. This model is described for 17 state variables. Several parameters must be estimated experimentally and others are measured directly. The model covers from hover to about 20 m/sec forward flight (low advance ratio  $\mu \leq 0.15$ ). This permits to consider that the thrust is perpendicular to the rotor disk

### A. Rigid-Body Equation of Motion

The helicopter is a vehicle that is free to simultaneously rotate and translate in all six degrees of freedom (6 DOF), which are: rolling, pitching, yawing, surging, swaying and heaving. The rigid-body dynamics of such vehicles are described by the Newton-Euler equations of motion. There are two reference

frames which in general are used to determine the motion of a helicopter: body-fixed and inertial. The equations of motion with respect to the body-fixed reference frame are:

$$m\dot{\mathbf{v}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (1)$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \quad (2)$$

where  $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$  is the vector of body velocities,  $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$  is the vector of angular rates,  $\mathbf{F} = [X \ Y \ Z]^T$  is the vector of external forces acting on the vehicle center of gravity (c.g.),  $\mathbf{M} = [L \ M \ N]^T$  is the vector of external moments,  $m$  is the helicopter mass and  $\mathbf{I}$  is the inertial tensor. The external forces and moments are produced by the main and the tail rotors, the gravitational forces, and the aerodynamic forces produced by the fuselage and the tail surfaces used as stabilizers.

From equation (1), the three differential equations describing the helicopter translational motion (3) about its three reference body-fixed axes with origin at the vehicle c.g., are:

$$\dot{u} = vr - wq - g \sin \theta + (X_{mr} + X_{fus})/m \quad (3)$$

$$\dot{v} = wp - ur + g \sin \phi \cos \theta + (Y_{mr} + Y_{fus} + Y_{tr} + Y_{vf})/m$$

$$\dot{w} = uq - vp + g \cos \phi \cos \theta + (Z_{mr} + Z_{fus} + Z_{ht})/m$$

where  $\phi$  is the roll angle,  $\theta$  is the pitch angle and  $g$  is the gravity acceleration. Similarly, from equation (2), the three ordinary differential equations describing the helicopter rotational motion (4), are derived. These equations do not depend on the reference frame.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})I_{xz} - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}qr + \\ &+ \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}pq + \\ &+ \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}L + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}N \\ \dot{q} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}}pr - \frac{I_{xz}}{I_{yy}}(p^2 - r^2) + \frac{1}{I_{yy}}M \\ \dot{r} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy})I_{xz} - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}pq - \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}qr + \\ &+ \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}L + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}N \end{aligned} \quad (4)$$

where  $L = L_{mr} + L_{vf} + L_{tr}$ ,  $M = M_{mr} + M_{ht}$ ,  $N = -Q_e + N_{vf} + N_{tr}$ . The subscript references to the component generating the respective force or moment: main rotor (mr), tail rotor (tr), fuselage (fus), and the stabilizers; vertical fin (vf) and horizontal tail (ht).  $Q_e$  is the torque produced by the engine to counteract the aerodynamic torque on the main rotor blades. In the above equations, we assumed that the fuselage center of pressure coincides with the c.g., therefore the moments created by the fuselage aerodynamic

forces are neglected. See [1] for details about forces and moments expressions.

The six previous first order differential equations constitute the rigid-body equations. We can know the inertial position  $(x, y, z)$  and the Euler angles  $(\phi, \theta, \psi)$  from them, using the suitable transformation. Euler angles give information about attitude. Solving the following three differential equations allows to know inertial position from body velocities:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\theta s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\theta s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\mathbf{R}$  is the transformation from body-fixed to inertial reference frame.  $c\theta$  and  $s\theta$  are abbreviations for  $\cos \theta$  and  $\sin \theta$ , respectively.  $\mathbf{R}$  is a rotation matrix; it has some important properties:

- It can be described by the product of individual rotation matrices.
- It is a orthogonal matrix.
- Its determinant is the unity.

Finally, to know the Euler angles from angular rates, the following transformation is used:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t\theta s\phi & t\theta c\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (7)$$

## B. Extension of the Rigid-Body Model

To improve the rigid-body model accuracy higher-order effects are taken into account, which are coupled to the rigid-body dynamics. These extensions are rotor dynamics, engine-drive train and actuators dynamics. The first ones are critical because on the X-Cell the rotor forces and moments largely dominate the dynamic response. The coupled rotor and stabilizer bar equations are lumped into one first-order equation of motion. This procedure is done for both lateral ( $b_1$ ) and longitudinal ( $a_1$ ) tip-path-plane flapping. The equations are expressed as follows:

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= -p - \frac{b_1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \frac{\partial b_1}{\partial \mu_v} \frac{v - v_w}{\Omega R} + \frac{B_{\delta_{lat}}}{\tau_e} \delta_{lat} \\ \dot{a}_1 &= -q - \frac{a_1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \left( \frac{\partial a_1}{\partial \mu} \frac{u - u_w}{\Omega R} + \frac{\partial a_1}{\partial \mu_z} \frac{w - w_w}{\Omega R} \right) \\ &+ \frac{A_{\delta_{lon}}}{\tau_e} \delta_{lon} \end{aligned} \quad (8)$$

where  $B_{\delta_{lat}}$  and  $A_{\delta_{lon}}$  are effective steady-state lateral and longitudinal gains from the cyclic inputs to the main rotor flap angles;  $\delta_{lat}$  and  $\delta_{lon}$  are the lateral and longitudinal cyclic control inputs;  $u_w, v_w$  and  $w_w$  are the wind components along, respectively,  $X, Y$  and  $Z$  helicopter body axes;  $\tau_e$  is the effective rotor time constant for a rotor with the stabilizer bar.

The partial derivatives are approximated by some functions, which are determined experimentally. See [1] for details.

The other inputs  $\delta_{col}$  and  $\delta_{ped}$  do not explicitly appear in any equation shown in this paper, but are used for the computation of main and tail rotor thrust ( $T_{mr}$  and  $T_{tr}$ , respectively). This involves an iterative computation of thrust coefficients which is included in the simulation model.

The rotor speed dynamic is also modeled, but the important fact is the existence of a electronic governor to regulate rotor speed by changing the throttle. This governor can not be modified. Note that the rotor speed is not constant. It is included in the dynamics proposed in [1].

Actuators are accurately modeled as third order transfer functions for the collective and cyclic (lateral and longitudinal) inputs. A second order transfer function is used for the pedal input. No inflow dynamics are necessary because the settling time for the inflow is significantly faster than the rigid body dynamics.

Equations (3), (4), (5), (7) and (8) constitute the mathematical model for the X-Cell. The rotational kinematic equations (7) are calculated using quaternions. Thus, 15 state variables are included in equations (3), (4), (5), (7), (8). By adding one state for rotor speed and one state for the rotor speed tracking error, the total model is a 17 state variables one. This mathematical model is implemented in Matlab/Simulink, which is a trademark of The MathWorks Inc. For the simulation, the fuel consumption is constant.

### III. CONTROL STRUCTURE

There already exist different types of control modes for an unmanned helicopter [5], [3], [2], [4]. Each control mode is named according to the states which are considered as outputs. For example, to keep the helicopter at a specific location, *position and heading* ( $x, y, z, \psi$ ) control mode is used. For a sensor failure such as the absence of position information from the global positioning system (GPS), *altitude and attitude* ( $z, \phi, \theta, \psi$ ) control mode is more desirable to stabilize the vehicle since the on-board inertial navigation system (INS) would still be able to provide altitude and attitude information. The set of outputs  $x, y, z, \beta$ , constitutes the *position and side slip angle* mode. In particular, if the controller tries to keep slide slip angle,  $\beta$ , at zero, the system is said to be operated in *coordinated flight* mode.

The X-Cell helicopter is equipped with a remote-control operated by a human pilot to maintain desired attitude, i. e., as any kind of VTOL it is maneuvered by controlling their attitude angles. The objective of the present paper is substitute the action of a pilot for an on-board automatic control system. An altitude/attitude control mode is used. Hence, we can move the helicopter to a specific location tilting it adequately such that the rotor produces sufficiently large horizontal forces. The larger the pitch or roll angle the bigger the longitudinal, respectively lateral, propulsive force.

Fig. 2 shows the control structure proposed. It is constituted by two control loops in cascade. The inner loop controls the

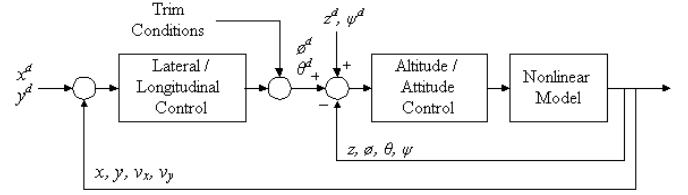


Fig. 2. Control scheme.

faster dynamics: altitude and attitude, and the outer loop controls the slower dynamics: lateral and longitudinal translation.

The synthesis procedure is also sequential. First it is necessary to ensure attitude control and then, translational control.

#### A. Altitude / Attitude Control

An altitude/attitude control mode allows to control the helicopter closely to a human pilot. The helicopter attitude dynamics are conditionally stable; a minimum amount of attitude feedback is required for the system to be stable; however, too much feedback will destabilize the system [4].

Taking into account the main control objective, it is proposed to develop the altitude/attitude control using SISO PID controllers, where altitude ( $z$ ) is the vertical position in inertial reference frame. There are four independent PID controllers, one for each angle ( $\phi, \theta, \psi$ ) and one for altitude. It is required to consider for the maximum ranges accepted by actuators, in order to avoid saturation.

The tuning procedure is difficult due the coupling between the state variables. The four PID controllers have to be tuning at the same time. Beginning to set proportional feedback in all the loops is sufficient to stabilize the attitude angles and to take  $z$ -position close to the desired value. However, every variable has an offset, which is eliminated including integral part in the controllers. To avoid abrupt changes, it is necessary to include a derivative part in the controllers. Finally, all the controllers have proportional, integral and derivative component, whose gains are fixed according of a trial and error procedure.

The transfer function considered for each PID controller is as:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (9)$$

The gains for each controller are shown in Table I:

TABLE I  
GAIN VALUES FOR EACH PID CONTROLLER

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
$z$ PID	3	0.2	0.6
$\phi$ PID	3	0.5	0.2
$\theta$ PID	3	1	0.2
$\psi$ PID	10	1.5	10



## B. Lateral / Longitudinal Control

We use fuzzy logic controllers of Mamdani type to control  $x$ ,  $y$  position. This type of controller has a heuristic nature, which reflect the experience of a human pilot.

An important issue in the design of the Mamdani controllers are the trim conditions. A helicopter is said to be at trim if all the forces, aerodynamic and gravitational, and aerodynamic moments acting on the helicopter about its center of gravity are in balance. Hence, by solving the nonlinear equations  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , one can solve for the system trim condition. The trim condition does not depend on positions, velocities and yaw. Six values are obtained as trim conditions:  $\delta_{col}^T$ ,  $\delta_{ped}^T$ ,  $a_1^T$ ,  $b_1^T$ ,  $\phi^T$  and  $\theta^T$ . In our case, it is important to know the last two ones, because these values allow us to obtain lateral and longitudinal steady positions.

To compute trim condition, it is necessary to approximate the expressions for total force and total moment (given in [1]) without considering contribution of the stabilizers; this is possible because the contribution of stabilizers on total force and total moment is small. Besides, an approximation of the rotor thrust is made for solving the trim condition. As result of this computation, the attitude trim in radians is  $\phi^T = 0.074665$  and  $\theta^T = 0$ . The real attitude trim used is  $\phi^T = 0.07988$  and  $\theta^T = 0$  in radians.

Finally, two Mamdani controllers are designed to adequately fix roll and pitch angle reference values. Both controllers are designed as the simplest possible form.

### C. Mamdani rules for lateral position

Given a reference  $y$ -position,  $y^d$ , this controller infers a desired roll angle,  $\phi^d$ , using  $y$ -position error,  $e_y$ , and velocity,  $v_y$ . Both inputs to the lateral Mamdani controller are in inertial reference frame. Fig. 3 displays the membership functions used for this Mamdani controller. There are nine rules to compute the desired value for roll. An example of these rules is as follows:

**If**  $e_y$  is Negative and  $v_y$  is Negative **Then**  $\phi^d$  is Positive

### D. Mamdani rules for longitudinal position

Given a reference  $x$ -position,  $x^d$ , this controller infers a desired pitch angle,  $\theta^d$ , using a  $x$ -position error,  $e_x$ , and a velocity,  $v_x$ . Both inputs to the longitudinal Mamdani controller are in inertial reference frame. Fig. 3 displays the membership functions used for this Mamdani controller. There are nine rules to compute the desired value for pitch. An example of these rules is as follows:

**If**  $e_x$  is Negative and  $v_x$  is Negative **Then**  $\theta^d$  is Negative

## IV. SIMULATION RESULTS

In this Section we report the performance of the PID controllers by tracking a square signal for each attitude angle independently. Also, it is shown how the overall control system is able to control the helicopter in hovering at a desired  $x$ ,  $y$ ,  $z$  position. Finally, sinusoidal tracking is done by  $z$ -position, while  $x$  and  $y$  positions reach constant references.

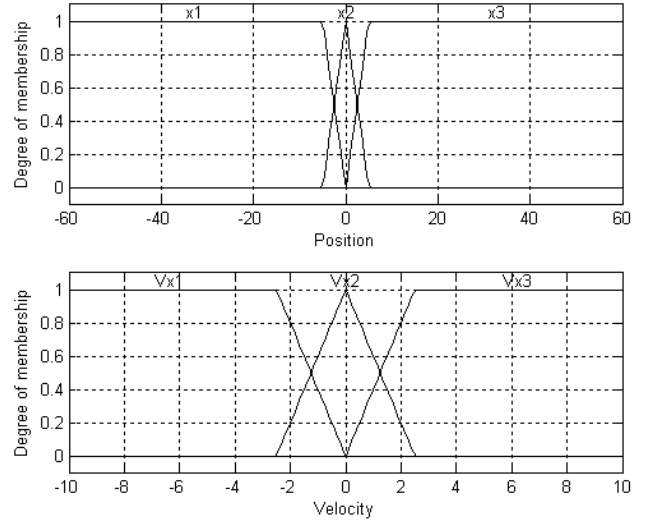


Fig. 3. Membership function used for each fuzzy controller.

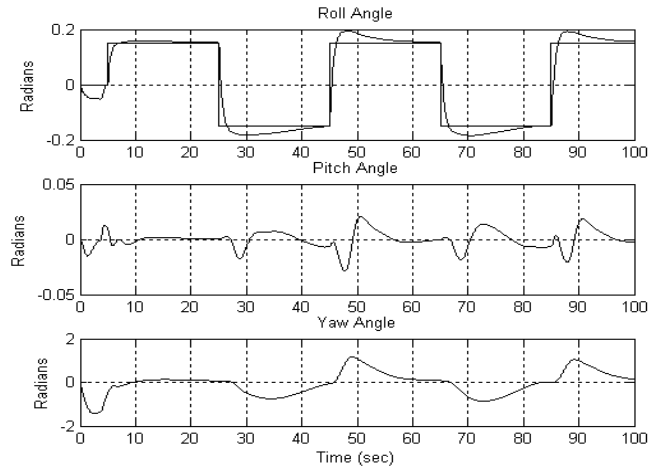


Fig. 4. Tracking for roll angle.

### A. PID Controllers Performance

Fig. 4, Fig. 5 and Fig. 6 displays roll, pitch and yaw attitude angles. In each figure, the respective angle tracks a square signal while the other two angles has zero as reference. Each figure shows how attitude angles are strongly coupled.

Fig. 7 presents attitude angles, each one with zero reference. The system is subject to disturbance. A white noise acts as wind disturbance on each body axe. It is incepted at 50 sec. with a maximum value unity. This maximum value represents a wind velocity of 1 m/sec. It has little effect over the attitude angles.

Fig. 8 shows inertial position for the last attitude control condition, i.e. stabilization of attitude angles. It is shown as the  $z$ -position is taken to an 20 m reference. Note as the  $x$  and  $y$ -positions increase fast.

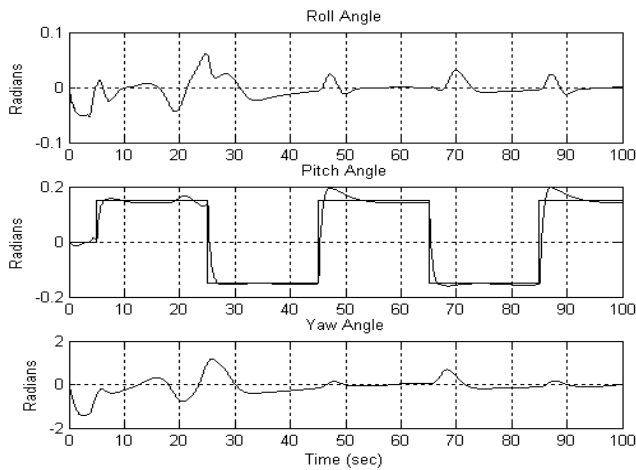


Fig. 5. Tracking for pitch angle.

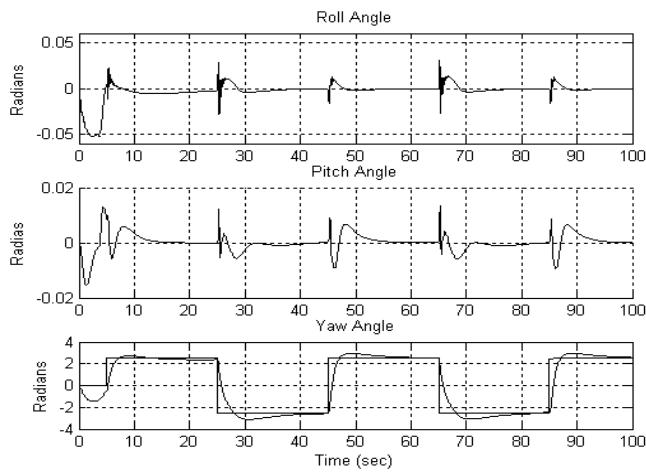


Fig. 6. Tracking of yaw angle.

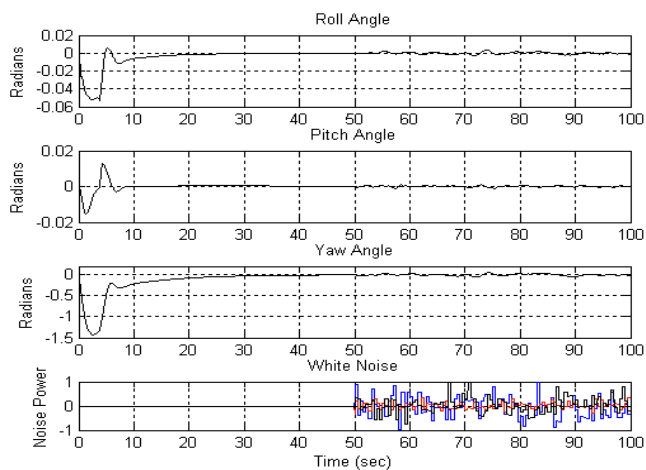


Fig. 7. Stabilization of attitude angles.

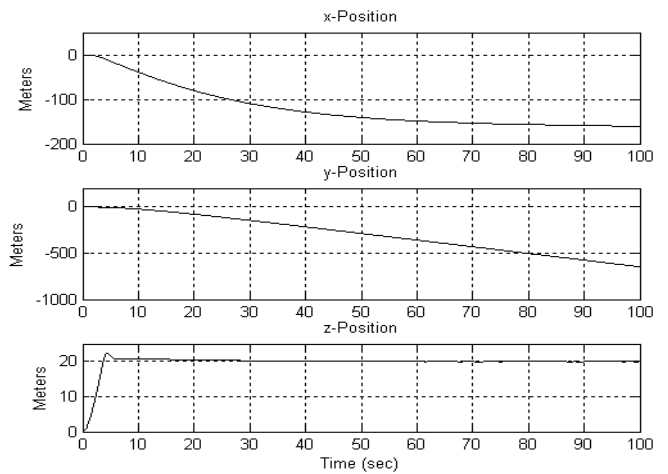


Fig. 8.  $x$  and  $y$ -positions without control and tracking in  $z$ -position.

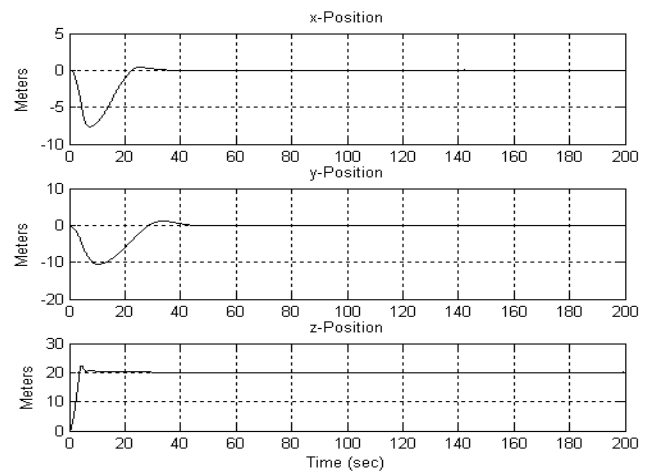


Fig. 9. Stabilization of inertial position.

### B. Fuzzy Control Performance

Fig. 9 shows inertial position for the same previous condition, but now including fuzzy control. The  $z$ -position reaches a 20 m reference and the  $x$  and  $y$ -positions return to zero after a transitory.

Fig. 10 displays attitude angles for the previous 20 m  $z$  reference and stabilization of  $x$  and  $y$ -positions; roll angle,  $\phi$ , and pitch angle,  $\theta$ , are practically maintained on their trim values 0.07988 and 0, respectively. Because the constant condition of position and attitude angles the helicopter is maintained in hover flight.

### C. Position Tracking

Fig. 11 shows inertial position for constant tracking in  $x$  and  $y$ -positions and sinusoidal tracking in  $z$ -position, with a good performance for the vertical ( $z$ ) and longitudinal ( $x$ ) movements. The angular frequency of the signal tracked by  $z$  is 0.1 rad/sec, and the  $x$  reference is  $-8$  m. Because the coupling between collective input and lateral cyclic input, the  $y$ -position oscillates around the 5 m reference.

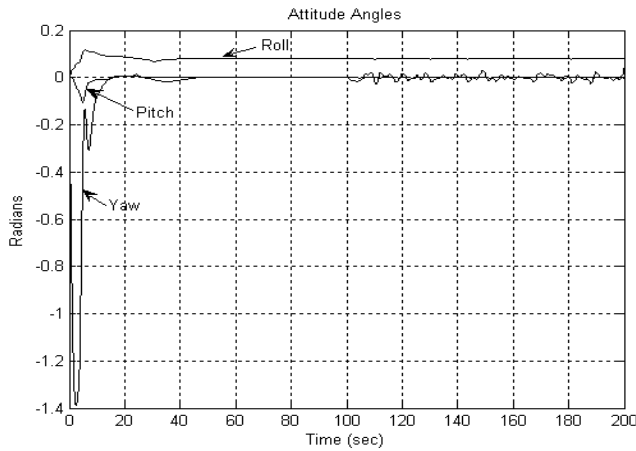


Fig. 10. Attitude angles to stabilization of positions.

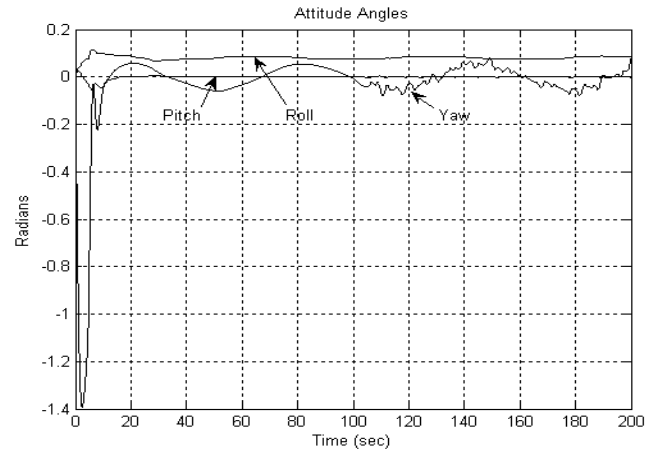


Fig. 12. Attitude angles to make tracking in all the 3 positions.

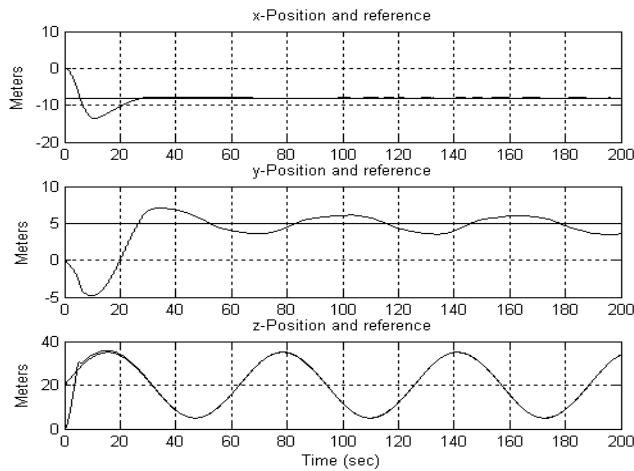


Fig. 11. Tracking for all the 3 positions.

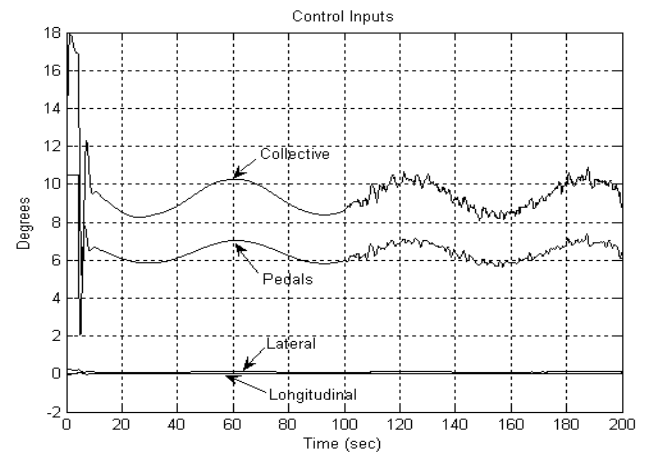


Fig. 13. Control inputs to make tracking in all the 3 positions.

Fig. 12 portrays attitude angles for the previous tracking condition. It is shown as roll and pitch angles oscillate to maintain the constant position. Yaw angle oscillates because of the coupling between collective and pedals inputs.

Fig. 13 presents control inputs for the previous condition; the cyclic inputs move sinusoidally to maintain the desired position and also react when the disturbance begins to affect.

## V. CONCLUSIONS

The control structure proposed in this work presents a good performance for hovering and forward flight at slow velocities. The control structure uses conventional PID controllers in an altitude/attitude control mode and Mamdani fuzzy controllers for translational movement. It is tested via simulation.

The control structure shows its effectivity over the most realistic mathematical model actually used for a mini-helicopter. Moreover, this control offers the advantage of rapid implementation. As a part of Colibri project, this control structure is going to be implemented in real time.

We are working to simplify the mathematical model and then to design a controller based on this simplified model. This new controller might be designed as a Takagi-Sugeno regulator.

## REFERENCES

- [1] V. Gavrilets, B. Mettler and E. Feron, "Dynamic model for a miniature aerobatic helicopter".
- [2] B. Kadmiry and D. Driankov, "A fuzzy gain-scheduler for the attitude control of an unmanned helicopter", in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 12, No. 4, August 2004.
- [3] T. Koo and S. Sastry, "Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization", in *Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC'98)*, pp. 3635–3640, Tampa, FL., USA, Dec. 1998.
- [4] B. Mettler, *Identification Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA., USA, 2003.
- [5] M. Sugeno, "Development of an intelligent unmanned helicopter", in *Fuzzy Modeling and Control, Selected Works of M. Sugeno*, T. H. Nguyen and N. R. Prasad (Eds.), CRC Press, pp. 13–43, Boca Raton, FL., USA, 1999.
- [6] [www.control-systems.net/colibri.htm](http://www.control-systems.net/colibri.htm)