

# Control de un robot bípedo de 7 vínculos usando un algoritmo *twisting*

Juan E. Machado\* Héctor M. Becerra\* Mónica Moreno\*

\* Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Jalisco S/N, Mineral de Valenciana, C.P. 36240, Guanajuato, Gto., Mexico. (e-mails: {juan.machado, hector.becerra, mmoreno}@cimat.mx).

---

**Resumen:** Este artículo estudia el problema de modelación y control de un robot bípedo plano de seis grados de libertad, generados por la interacción de siete vínculos que constituyen el cuerpo del robot, incluyendo pies. En este estudio se plantea un sistema completamente actuado debido al efecto del pie de soporte en equilibrio estático. El artículo detalla los aspectos de modelación del sistema híbrido que representa las fases de la locomoción bípeda. Se presenta el diseño de un controlador basado en la selección de salidas que codifican la locomoción, las cuales se regulan para seguir trayectorias adecuadas. La principal contribución del artículo es la evaluación de un control con modos deslizantes de segundo orden, en particular, un algoritmo *twisting* que satisface las propiedades de robustez requeridas en el control de robots bípedos. El buen desempeño del controlador se presenta a través de simulaciones en las que se incluyen incertidumbre de parámetros físicos del robot y una perturbación externa de tipo impulsiva.

*Palabras clave:* Robot bípedo plano, control robusto, algoritmo *twisting*.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de robots caminantes es una área de investigación de gran interés científico y tecnológico (Westervelt et al. (2007)). Dada la complejidad cinemática y dinámica de este tipo de robots, el diseño de controladores eficientes y robustos para lograr una caminata estable resulta desafiante (Westervelt et al. (2007)). El presente artículo se orienta al estudio de un robot bípedo plano que se modela como un sistema de múltiples péndulos.

En general, un robot bípedo es una cadena cinemática abierta que consiste típicamente en tres subcadenas, dos de ellas las piernas y una más el torso, todas conectadas en el punto llamado cintura. La modelación de robots bípedos visto como un sistema de múltiples péndulos se ha planteado desde el caso más simple en Grizzle et al. (2001), donde con solo tres vínculos se representa a un bípedo sin rodillas ni pies. Con el fin de analizar un modelo más cercano a la anatomía humana, el modelo de cinco vínculos, que incluye rodillas pero no pies, ha sido uno de los más estudiados, por ejemplo en Plestan et al. (2003), Morris y Grizzle (2005), Nikkhah et al. (2007) y Lebastard et al. (2005). Detalles de los modelos mencionados se proporcionan en Westervelt et al. (2007). Cabe mencionar que en las referencias mencionadas se modelan bípedos planos cuyo movimiento se restringe al plano sagital. A pesar de que un robot real realiza su movimiento en un espacio de tres dimensiones, la dinámica en el plano sagital básicamente está desacoplada de la dinámica en el plano frontal (Westervelt et al. (2007)). Además, las componentes esenciales de la caminata bípeda se observan en el plano sagital, por lo que en este artículo se estudia un robot plano.

En la literatura, varios de los modelos de robots planos se han considerado sin pies, esto es, el contacto con el suelo

se supone puntual, por ejemplo en Plestan et al. (2003) y Nikkhah et al. (2007). Sin embargo, los pies juegan un rol importante en la progresión de la caminata, en el soporte vertical y en la inicialización de levantar la pierna de balanceo correspondiente desde el suelo. Ejemplos de modelos de bípedos con pies se encuentran en Kaddar et al. (2012) y Westervelt et al. (2007). Diferentes técnicas de control han sido evaluadas en el control de robots bípedos. Algunas que han demostrado conseguir una caminata estable en robots bípedos planos son el control PD con alta ganancia en Morris y Grizzle (2005), el control no lineal con convergencia en tiempo finito de Bhat y Bernstein (2000), aplicado por ejemplo en Plestan et al. (2003) y Lebastard et al. (2005) y el control con modos deslizantes clásico en Nikkhah et al. (2007), entre otros. En este trabajo se propone el uso de un control robusto basado en un algoritmo *twisting* (Levant y Fridman (2002)).

La contribución del presente artículo es la evaluación de un control con modos deslizantes de segundo orden conocido como algoritmo *twisting* en un modelo de robot bípedo plano de 7 vínculos que incluye pies. Se hace énfasis en la modelación del sistema dinámico híbrido que representa las fases de la locomoción. También se detalla la síntesis de un controlador que transforma el sistema a una forma lineal en la que el algoritmo *twisting* permite lograr el seguimiento de referencias de una manera robusta ante incertidumbre en algunos parámetros del robot. A diferencia de muchos trabajos en la literatura, que suponen que el robot tiene pies puntuales que no generan actuación en fase de soporte, en este artículo se precisa la validez del modelo con pies mediante el análisis del centro de presión. El modelo y control desarrollados se implementan en Python y también se evalúa el control ante una perturbación externa de tipo impulsiva.

## 2. MODELACIÓN DE LA LOCOMOCIÓN BÍPEDA

En el presente estudio, consideramos un modelo bípedo plano con 7 vínculos rígidos interconectados a través de articulaciones rotacionales, lo que permite tener un grado de libertad para cada vínculo. Consideramos a los vínculos como barras cilíndricas homogéneas con el fin de simplificar el cálculo de sus centros de masa. Se supone que hay un actuador en cada articulación: uno en cada tobillo, uno en cada rodilla y dos en la cadera. En la Fig. 1 se muestra un diagrama esquemático de éste sistema, donde cada vínculo es denotado por  $\mathcal{B}_i$ .

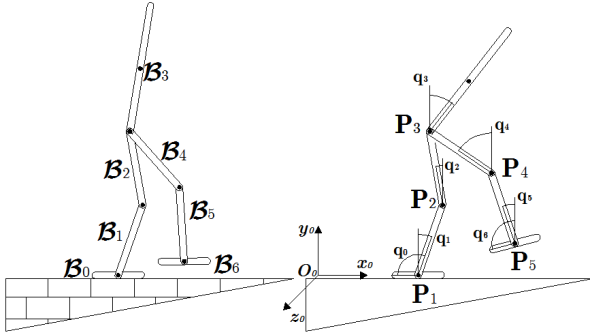


Fig. 1. Diagrama esquemático de un bípedo plano de 7 vínculos. A la izquierda se muestra la definición de cada vínculo. A la derecha se aprecia la definición de las articulaciones así como del sistema de referencia.

Para la caminata bípeda, cada pierna del robot posee dos fases, una de soporte simple y una de balanceo, de forma que en todo momento las piernas tienen distintas fases, es decir, mientras una pierna está en la fase de balanceo, la otra estará en la fase de soporte. La conmutación entre fases se lleva a cabo mediante la colisión instantánea entre el suelo y la pierna de balanceo.

Se supone de forma momentánea que durante cada fase de soporte simple el pie de soporte se mantiene en equilibrio estático en contacto con el suelo, por lo que el robot tendrá 6 grados de libertad con 6 actuadores independientes, entonces el robot será completamente actuado. Daremos validez a ésta suposición mediante restricciones dinámicas a través del llamado *centro de presión* (Vukobratović y Borovac (2004)) del robot, presentadas en la sección 2.4.

El modelo completo del robot se divide en dos partes: la dinámica del robot durante la fase de soporte simple, representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales que se obtienen a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange (Ortega et al. (1998)) y el modelo de colisión con el suelo, que es obtenido usando principios de impulso y cantidad de movimiento como en Kaddar et al. (2012); Westervelt et al. (2007). Dicho modelo puede ser representado como un sistema híbrido no lineal con efectos impulsivos como en Grizzle et al. (2001); Plestan et al. (2003); Morris y Grizzle (2005).

### 2.1 Dinámica Lagrangiana

Durante la fase de soporte simple, el pie de soporte actúa como pivote para el robot, el cual tendrá 6 grados de libertad. Para escribir las ecuaciones de movimiento

definimos un vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_6)$  con el que se representa la configuración del robot,  $q_i$  es la posición angular respecto al semieje  $y$  positivo (medido en sentido anti-horario) de un sistema de referencia ortogonal  $\mathbf{Oxyz}$  (fijo en el tobillo de soporte) para cada vínculo  $\mathcal{B}_i$  para  $i = 1, \dots, 5$  y respecto a la horizontal para  $\mathcal{B}_6$ . Nótese que en  $\mathbf{q}$  se omite la posición angular  $q_0$  de  $\mathcal{B}_0$ , pues como ya se mencionó, se supone que el pie de soporte permanece en equilibrio estático de forma horizontal, i.e.  $q_0 \equiv 0$  fijo. La definición del sistema de referencia puede observarse en la Fig. 1. Las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^i} = \mu_i \quad i = 1, \dots, 6 \quad (1)$$

donde  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{P}(\mathbf{q})$  es la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}$  y la energía potencial  $\mathcal{P}$  debida a la gravedad,  $\mu_i$  es la fuerza generalizada para cada  $\mathcal{B}_i$ . Es posible representar a la energía cinética como  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \sum_{i=1}^6 \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{Q}}_i^T \dot{\mathbf{Q}}_i + \frac{1}{2} j_i^z \dot{q}_i^2 \right)$ , donde  $\mathbf{Q}_i$  es el centro de masa y  $j_i^z$  es el momento de inercia de cada vínculo respectivamente (ver Sección A.1). Las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden adoptar la siguiente expresión matricial (Spong et al. (2006))

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  es una matriz simétrica definida positiva de tamaño  $6 \times 6$ , conocida como matriz de inercia,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{G}$  contienen los efectos centrífugales, Coriolis y gravitacionales en el robot,  $\boldsymbol{\tau}$  es un vector con los torques  $\tau_i$  de los actuadores,  $\mathbf{A} \in M_{6 \times 6}(\mathbb{R})$  relaciona las fuerzas generalizadas  $\mu_i$  con los torques  $\tau_i$ , que además es invertible pues el robot se considera completamente actuado. El modelo (2) puede representarse como un sistema de 12 ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es el vector de estados y  $\mathbf{u} := \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}$  será la variable de control. Tomaremos al espacio de estados de éste sistema como  $\mathcal{X} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12} \mid \mathbf{q} \in (-\pi, \pi)^6, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^6\}$ . Notar que no todos los puntos en  $\mathcal{X}$  corresponden a una configuración físicamente admisible del robot (e.g. que el robot esté sobre la superficie de caminado), sin embargo como introduciremos condiciones de colisión, se supondrá por simplicidad que es suficiente tomar condiciones iniciales que impliquen una configuración admisible para el robot.

### 2.2 Modelo de colisión

Ahora estudiamos la colisión debida al contacto entre el pie de balanceo con el suelo. Para la obtención del modelo de colisión se hacen algunas consideraciones estándar (Hürmüzlü y Moskowitz (1986)):

- El impacto es perfectamente plástico (i.e. no hay rebote).
- El contacto se lleva a cabo en un periodo de tiempo infinitesimal.
- La pierna de soporte se levanta de forma natural, evitando una fase de soporte doble.
- No hay deslizamiento entre el pie de balanceo y el suelo.

- El pie de balanceo realiza contacto plano con el suelo.
- Las fuerzas externas por el contacto son impulsivas.
- Los actuadores no ejercen fuerzas impulsivas.

Debido a que suponemos un pie no trivial, el contacto plano del pie de balanceo con el suelo implica la aplicación de una distribución de fuerzas del último sobre el primero. Sin embargo, siguiendo las ideas de Westervelt et al. (2007) es posible considerar una sola fuerza resultante más un torque externo actuando ambos sobre el tobillo del pie de balanceo. Si denotamos por  $\mathbf{P}_5(\mathbf{q})$  las coordenadas cartesianas del tobillo de balanceo y por  $\mathbf{P}_\theta(\mathbf{q})$  el ángulo absoluto del pie de balanceo, es posible incorporar los efectos de las fuerzas externas directamente al modelo (2) mediante la expresión (Siciliano et al. (2009))

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{P_5}^T \delta \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \delta \boldsymbol{\tau}^{ext} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{J}_{P_5} := \frac{\partial \mathbf{P}_5(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  es una matriz de  $2 \times 6$  de rango completo,  $\mathbf{J}_{P_\theta} := \frac{\partial \mathbf{P}_\theta(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  es un vector de  $\mathbb{R}^6$ , mientras que  $\delta \mathbf{F}^{ext}$  y  $\delta \boldsymbol{\tau}^{ext}$  son funciones vectoriales de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}$  que denotan la fuerza resultante y el torque aplicados al tobillo en el aire al momento del contacto con el suelo (en forma de deltas de Dirac). *Notar que en la expresión anterior no se incluye el efecto de la reacción del suelo sobre el pie de soporte, ya que suponemos que el sistema de referencia está fijo a éste último.* Bajo las suposiciones anteriores es posible integrar (4) respecto al tiempo durante el periodo de contacto para obtener (Westervelt et al. (2007))

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}^+) (\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{F}^{ext} := \int_{t^-}^{t^+} \delta \mathbf{F}^{ext}(\tau) d\tau$  y  $\boldsymbol{\tau}^{ext} := \int_{t^-}^{t^+} \delta \boldsymbol{\tau}^{ext}(\tau) d\tau$  denotan la integración de las fuerzas impulsivas durante el periodo del impacto, mientras que  $\dot{\mathbf{q}}^\pm := \dot{\mathbf{q}}(t^\pm)$ , siendo  $t^-$  y  $t^+$  los instantes previo y posterior al impacto, que por hipótesis satisfacen  $t^+ - t^- \rightarrow 0$ . Además la configuración del robot no cambia durante la colisión por lo que  $\mathbf{q}^+ := \mathbf{q}(t^-) = \mathbf{q}(t^+)$ . Lo que se pretende determinar a partir de (5) es el cambio en  $\dot{\mathbf{q}}$  después del impacto, sin embargo los términos  $\mathbf{F}^{ext}$  y  $\boldsymbol{\tau}^{ext}$  también son incógnitas pero a partir de las hipótesis planteadas es posible formular ecuaciones adicionales. La condición de no deslizamiento y no rebote nos permite establecer que

$$\dot{\mathbf{P}}_5 = \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{0}, \quad (6)$$

debido a que el pie en el aire se convierte en el pie de soporte después del impacto. Por la hipótesis de equilibrio estático del pie de soporte de la sección anterior es posible establecer la siguiente expresión concerniente a la no rotación del pie de soporte

$$\dot{\mathbf{P}}_\theta = \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Con las ecuaciones (5), (6) y (7) es posible plantear un sistema lineal para la solución de las incógnitas  $\dot{\mathbf{q}}^+$ ,  $\mathbf{F}^{ext}$  y  $\boldsymbol{\tau}^{ext}$  que puede adoptar la siguiente expresión matricial

$$\mathbf{\Pi} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^+ \\ \mathbf{F}^{ext} \\ \boldsymbol{\tau}^{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{q}^+) \dot{\mathbf{q}}^- \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde

$$\mathbf{\Pi} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{q}^+) & -\mathbf{J}_{P_5}^T & -\mathbf{J}_{P_\theta}^T \\ \mathbf{J}_{P_5} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{J}_{P_\theta} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix}.$$

*Lema 1.* La matriz  $\mathbf{\Pi}$  es invertible.

**Demostración** Sea  $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{F}^{ext}, \boldsymbol{\tau}^{ext}) \in \text{Ker}(\mathbf{\Pi})$ , entonces,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext}$ ,  $\mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . Ésto implica que

$$\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}$$

y,

$$\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}.$$

Sin embargo  $\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T = (\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T)^T = \mathbf{0}$  lo que simplifica las expresiones anteriores a

$$\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}.$$

Luego, debido a que  $\mathbf{B}(\mathbf{q}^+)$  es definida positiva y  $\mathbf{J}_{P_5}$  junto con  $\mathbf{J}_{P_\theta}$  son de rango completo (ver Sección A.1), se tiene que  $\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T$  y  $\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T$  son definidas positivas con lo que  $\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$  y  $\boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}$ . Esto a su vez implica que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}_{6 \times 1}$ , por tanto  $\{\mathbf{0}_{9 \times 1}\} = \text{Ker}(\mathbf{\Pi})$ . ■

El lema anterior nos indica que siempre existe solución única de (8) la cual nos dará una expresión para  $\dot{\mathbf{q}}^+$  en términos de  $\dot{\mathbf{q}}^-$  que se usará para reiniciar el modelo (3). Para ello es necesario introducir un cambio de coordenadas que represente la transformación de la pierna de balanceo a la pierna de soporte y viceversa, sin embargo por simetría lo anterior es equivalente a una re-etiquetación de las coordenadas de  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ . Expresamos dicha re-etiquetación como una matriz  $\mathbf{R} \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$  actuando en  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  de tal forma que  $\mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{I}_{5 \times 5}$ . El resultado final de ésta sección es una expresión para  $\mathbf{x}^+ := (\mathbf{q}^+, \dot{\mathbf{q}}^+)$  en términos de  $\mathbf{x}^- := (\mathbf{q}^-, \dot{\mathbf{q}}^-)$  que a partir de (8) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R} \mathbf{0}_{5 \times 1}] \mathbf{q}^- \\ [\mathbf{R} \mathbf{0}_{5 \times 4}] \mathbf{\Pi}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{q}^+) \dot{\mathbf{q}}^- \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &=: \mathbf{\Delta}(\mathbf{x}^-). \end{aligned} \quad (9)$$

No se dará la expresión explícita de  $\mathbf{\Delta}$  pues su cálculo es directo, sin embargo el teorema de la función implícita implica que  $\mathbf{\Delta}$  es tan suave como las entradas de  $\mathbf{\Pi}$  en (8), con lo que se puede concluir que  $\mathbf{\Delta}$  es analítica en  $\mathbf{x}^-$ . *En la Sección A.1 se detallan las expresiones de algunos términos introducidos en ésta sección (e.g.  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{J}_{P_5}$ ).*

### 2.3 Modelo híbrido

El modelo híbrido completo del robot puede ser expresado como un sistema con efectos impulsivos (Ye et al. (1998)). Supóngase que las trayectorias del sistema tienen límites finitos por la izquierda y la derecha. que denotamos por  $\mathbf{x}^- := \lim_{\tau \rightarrow t^-} \mathbf{x}(\tau)$  y  $\mathbf{x}^+ := \lim_{\tau \rightarrow t^+} \mathbf{x}(\tau)$  respectivamente. Entonces el modelo quedará descrito por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, & \mathbf{x}^-(t) \notin S \\ \mathbf{x}^+(t) = \mathbf{\Delta}(\mathbf{x}^-(t)), & \mathbf{x}^-(t) \in S \end{cases} \quad (10)$$

donde  $S$  es la superficie de nivel de una función altura  $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  la cual está definida por la coordenada cartesiana  $\mathbf{y}$  del pie de balanceo. En términos coloquiales las trayectorias solución del modelo híbrido están especificadas por la dinámica de soporte simple hasta el impacto, que ocurre cuando el estado alcanza al conjunto  $S$ . Ésto último representa (físicamente) la colisión entre el pie de balanceo con la superficie de caminado. Para evitar que

el estado  $\mathbf{x}$  tome dos valores al “momento” del impacto, el evento de colisión puede ser descrito en términos de los valores del estado en el instante “previo” denotado por  $t^-$  y del instante “posterior” al impacto denotado por  $t^+$ . Éstos valores son representados por los límites  $\mathbf{x}^-$  y  $\mathbf{x}^+$  respectivamente.

#### 2.4 Restricciones dinámicas

A continuación se estudia la existencia del centro de presión (Vukobratović y Borovac (2004)) en el sistema bajo estudio y cómo puede representar una restricción dinámica para el modelo completamente actuado del robot en su fase de soporte simple presentado en la sección 2.1 en términos del mismo. Puesto que se ha supuesto una geometría cilíndrica para los vínculos, es posible definir una superficie de contacto entre el suelo y el pie de soporte  $\mathcal{B}_0$  como  $\mathbf{S}_{\mathcal{B}_0} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in [-l_0, l_0], x_2 = x_3 = 0\}$ , donde  $l_0 = l_6$  es la longitud media de cada pie. Al ser una superficie no trivial, el suelo ejerce una distribución de fuerzas sobre el pie de soporte, cuya fuerza resultante puede ser escrita por

$$\mathbf{R}_S := \int_{-l_0}^{l_0} \boldsymbol{\rho}_S(x, 0, 0) dx \quad (11)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}_S : \mathcal{T} \times \mathbf{S}_{\mathcal{B}_0} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la distribución de fuerza en el tiempo  $t \in \mathcal{T} = \mathbb{R}^+$  que ejerce el suelo sobre  $\mathbf{S}_{\mathcal{B}_0}$ . Si denotamos por  $\mathbf{P}_1$  las coordenadas cartesianas del tobillo de soporte, es posible calcular el momento resultante que ejerce  $\boldsymbol{\rho}_S$  sobre  $\mathbf{P}_1$  como

$$\mathbf{M}_S := \int_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}_0}} (\mathbf{p} - \mathbf{P}_1) \times \boldsymbol{\rho}_S(\mathbf{p}) dS. \quad (12)$$

Veremos ahora que la expresión anterior puede ser escrita en términos de la resultante  $\mathbf{R}_S$  actuando sobre un punto particular de  $\mathbf{S}_{\mathcal{B}_0}$ , para ello consideremos primero la siguiente definición.

*Definición 2.* Sean  $\mathcal{B}$  un cuerpo rígido en  $\mathbb{R}^3$  con superficie  $S_{\mathcal{B}}$ ,  $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$  un punto fijo de  $\mathcal{B}$  y  $\boldsymbol{\rho} : \mathcal{T} \times S_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $(t, \mathbf{p}) \mapsto \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p})$  una distribución de fuerza que actúa sobre cada punto  $\mathbf{p}$  de  $S_{\mathcal{B}}$  en el tiempo  $t$ . Si existe un punto  $\mathbf{CoP} \in \mathcal{T} \times S_{\mathcal{B}}$  tal que:

$$(\mathbf{CoP} - \mathbf{o}) \times \int_{S_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS = \int_{S_{\mathcal{B}}} (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \times \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS$$

entonces  $\mathbf{CoP}$  será el centro de presión de  $\boldsymbol{\rho}$ . Notar que  $\int_{S_{\mathcal{B}}} (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \times \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS$  es el momento resultante de la fuerza  $\boldsymbol{\rho}$  respecto al punto  $\mathbf{o}$  y  $\int_{S_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS$  es la fuerza total resultante que ejerce  $\boldsymbol{\rho}$  en  $S_{\mathcal{B}}$ .

Ahora estamos en condiciones de probar la existencia del  $\mathbf{CoP}$  para el vínculo  $\mathcal{B}_0$ .

*Proposición 3.* Para la superficie de contacto  $\mathbf{S}_{\mathcal{B}_0}$  y la distribución de fuerza  $\boldsymbol{\rho}_S$ , el centro de presión existe y solo tiene valor en la componente  $x$ .

**Demostración** Sea  $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, 0)$  y supongamos que  $\mathbf{R}_S$  en (11) y que  $\mathbf{M}_S$  en (12) están definidas por componentes como  $t \mapsto (M^{(x)}, M^{(y)}, M^{(z)})$  y  $t \mapsto (r^{(x)}, r^{(y)}, 0)$  respectivamente, entonces:

$$(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{P}_1) \times \mathbf{R}_S = \mathbf{M}_S$$

si y solo si  $(0, 0, \nu_1 r^{(y)} - \nu_2 r^{(x)}) = (M^{(x)}, M^{(y)}, M^{(z)})$ .

Esto implica que  $M^{(x)} = M^{(y)} = 0$ . Ahora, dado que el contacto siempre se dará a nivel del suelo, entonces  $\nu_2 \equiv 0$  y dado que las fuerzas verticales que puede ejercer el suelo serán solamente fuerzas de empuje, entonces se tiene que  $r^{(y)} > 0$ , por lo que si definimos a  $\boldsymbol{\nu}$  como:

$$\boldsymbol{\nu} := \left( \frac{M^{(z)}}{r^{(y)}}, 0, 0 \right)$$

bajo la restricción  $\frac{M^{(z)}}{r^{(y)}} \in [-l_0, l_0]$  entonces  $\boldsymbol{\nu}$  será el centro de presión. ■

La proposición anterior nos permite sustituir la distribución de presión  $\boldsymbol{\rho}_S$  por la resultante  $\mathbf{R}_S$  actuando de forma puntual sobre el centro de presión  $\mathbf{CoP}$ , por lo que la suma de momentos sobre  $\mathcal{B}_0$  puede ser escrita como:

$$\mu_0 = -\tau_1 + \mathbf{CoP}^x \mathbf{R}_S^y = 0 \quad (13)$$

donde  $\tau_1$  es el torque del tobillo de soporte,  $\mathbf{R}_S^y > 0$  es la componente vertical de la reacción del suelo sobre el bípodo. Dicho término puede obtenerse a partir de la suma de fuerzas externas para el sistema completo, que por la ecuación de Newton tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{R}_S = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^6 \mathbf{L}_i - \sum_{i=0}^6 \mathbf{w}_i \quad (14)$$

donde  $\mathbf{w}_i$  y  $\mathbf{L}_i$  son los pesos y las cantidades de movimiento lineal para cada  $\mathcal{B}_i$  respectivamente. Por lo que una expresión explícita del centro de presión estará dada por:

$$\mathbf{CoP}^x = \frac{\tau_1}{\mathbf{R}_S^y} \quad (15)$$

siendo éste valor físicamente admisible si y solo si  $\mathbf{CoP}^x \in [-l_0, l_0]$ . *Notar que ésta última restricción se impone directamente sobre las entradas de control y sobre la dinámica del sistema.* Otros estudios (e.g. Kaddar et al. (2012)), han considerado la inclusión de restricciones producidas por hipótesis de fricción, en nuestro caso descartamos éstas restricciones considerando coeficientes de fricción suficientemente grandes entre el suelo y el pie de soporte, esto significa que no existe deslizamiento entre el pie de soporte y el suelo bajo ninguna circunstancia.

### 3. CONTROL PARA LA LOCOMOCIÓN BÍPEDA

En ésta sección se desarrolla un control en retroalimentación para el sistema (10) que permita la obtención de un ciclo de caminado estable, que en su nivel más elemental consiste en mantener el torso semi-erecto y el avance de la pierna de balanceo (pasar de atrás de la pierna de soporte a el frente de la misma) mientras prepara el contacto con el suelo.

#### 3.1 Selección de salidas y linealización

Una función de salida para nuestro sistema, consiste en una función que depende estrictamente de  $\mathbf{q}$  que bajo una convergencia a algún valor deseado dará un ciclo de caminado. Dicha salida ha sido seleccionada en nuestro caso como

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{P}_5^x - (p^x + s) \\ \mathbf{P}_5^y - \gamma(\mathbf{P}_5^x) \\ \mathbf{P}_3^x - (p^x + \mu s) \\ q_2 \\ q_3 \\ q_6 \end{bmatrix} =: \mathbf{h}(\mathbf{q}) \quad (16)$$

donde  $\mathbf{P}_5$  es la coordenada cartesiana del pie de balanceo,  $p^x$  es la coordenada  $x$  del pie de soporte,  $\mathbf{P}_3^x$  es la coordenada cartesiana  $x$  de la cadera del robot (ver Sección A.1),  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función cuadrática con la cual buscamos que la altura del pie de balanceo describa una parábola cuyas raíces coincidan con un tamaño de paso del robot deseado,  $s > 0$  nos permite elegir el tamaño de paso y  $\mu > 0$  es un factor con el cual podemos modificar la configuración del robot al momento de la colisión con el suelo. *Notar que cuando  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$  el robot adopta una configuración adecuada para dar un paso.* Entonces el objetivo de control es llevar la salida (16) a cero. Dado que  $\mathbf{y}$  depende sólo del vector  $\mathbf{q}$  y el modelo dinámico (3) es de segundo orden, entonces el grado relativo de cada  $y_i$  es al menos dos. Usando notación estándar para la derivada de Lie (ver Khalil y Grizzle (2002)) es posible obtener mediante cálculos directos que

$$\ddot{\mathbf{y}} = L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (17)$$

donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  se definen en (3). Se asume de forma momentánea que la matriz de desacoplamiento  $L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x})$  es invertible para alguna región de interés. Ésta región de interés restringe la validez del control a un subconjunto del espacio de estados donde se satisface  $q_4 - q_5 < 0$  y  $q_1 \neq \pm \frac{\pi}{2}$  (ver Sección A.2) evitando así singularidades del controlador. Es posible usar el método de dinámica inversa para definir una variable de control auxiliar  $\mathbf{v}$  que se introduce en la ley de control linealizante

$$\mathbf{u} = (L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}))^{-1} (\mathbf{v} - L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x})), \quad (18)$$

tal que la dinámica en (17) se reduce a seis dobles integradores:

$$\ddot{y}_i = v_i, \quad (19)$$

para  $i = 1, \dots, 6$ . En la literatura se han usado diferentes enfoques para el diseño de la variable de control auxiliar  $\mathbf{v}$ , como son técnicas lineales (Morris y Grizzle (2005)) o bien las ideas de estabilización en tiempo finito de Bhat y Bernstein (2000) estudiadas en Grizzle et al. (2001). Sin embargo nuestra propuesta de diseño consiste en las ideas del control con modos deslizantes, en particular modos deslizantes de segundo orden (Levant y Fridman (2002)), como se describe a continuación.

### 3.2 Algoritmo Twisting

El control con modos deslizantes clásico ha sido aplicado al control de robots bípedos, por ejemplo en Nikkhah et al. (2007). Es bien conocida la robustez de este tipo de control con respecto a varias perturbaciones internas y externas. Sin embargo, la entrada auxiliar para este tipo de control es discontinua, lo cual genera el indeseable efecto de castaño (chattering), esto es, una vibración dañina de alta frecuencia en el sistema controlado. Para solventar este inconveniente, una alternativa que ha tenido gran aceptación es la teoría de los modos deslizantes de alto orden (Levant y Fridman (2002)). En particular, los algoritmos con modos deslizantes de segundo orden *twisting* y *super-twisting* han sido aplicados en diferentes problemas, por ejemplo, control de robots móviles (Becerra et al. (2014)) y control de motores (Lin y Chiang (2013)).

El control con modos deslizantes de segundo orden proporciona las características de convergencia en tiempo

finito y robustez para el rechazo de perturbaciones del control con modos deslizantes clásico, con la ventaja de que las señales de control generadas son continuas (Levant y Fridman (2002)). En nuestro caso de estudio se requiere la estabilización en tiempo finito de 6 dobles integradores (19). Para tal efecto, el algoritmo *twisting* proporciona convergencia finita al origen ( $y = 0, \dot{y} = 0$ ) de un doble integrador perturbado (Orlov et al. (2011)), a diferencia del algoritmo *super-twisting* que genera convergencia finita a una superficie deslizante que establece una dinámica exponencialmente estable al origen.

Para obtener una caminata estable, es importante asegurar la convergencia de las salidas seleccionada antes de que se produzca impacto del pie de balanceo con el suelo, por lo que el control *twisting* lo garantiza a diferencia del control *super-twisting*. Por esta razón, se propone aprovechar las beneficios de robustez del control *twisting* ante perturbaciones internas y externas para lograr una locomoción estable aún cuando exista incertidumbre en algunos parámetros del robot o perturbaciones externas impulsivas.

En el planteamiento de la sección anterior, una vez que se tiene el sistema linealizado con 6 dinámicas de segundo orden desacopladas (19), un algoritmo *twisting* que genera convergencia finita al origen ( $y = 0, \dot{y} = 0$ ) es:

$$v_i = -k_{i_1} |y_i|^\alpha \text{sign}(y_i) - k_{i_2} |\dot{y}_i|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \text{sign}(\dot{y}_i), \quad (20)$$

donde  $k_{i_1} > 0, k_{i_2} > 0$  son ganancias de control. Incluso, como se plantea en Orlov et al. (2011) este algoritmo además de generar señales continuas que no generan castaño, es capaz de estabilizar el doble integrador perturbado. En la siguiente sección se muestran los resultados de utilizar (18) con control auxiliar (20) sobre el modelo del robot bípedo (10). Como un aspecto importante que típicamente no se ha considerado en la literatura, los parámetros de control se sintonizan de tal forma que sea válida la restricción en el centro de presión establecida en la Proposición 3. Por el momento dicha sintonización se realiza manualmente; sin embargo se planea como trabajo futuro introducir algoritmos de aprendizaje para sintonizar éstas ganancias.

## 4. EVALUACIÓN EN SIMULACIÓN

Para el modelo del robot bípedo (10) considérese los siguientes parámetros sintéticos cercanos a las proporciones promedio de un humano adulto. Para las longitudes medias de los vínculos se tiene:  $l_1 = l_2 = l_4 = l_5 = 0.25\text{m}$ ,  $l_3 = 0.4\text{m}$  y  $l_0 = l_6 = 0.15\text{m}$ . Para las masas:  $m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = 10\text{kg}$ ,  $m_3 = 20\text{kg}$  y  $m_0 = m_6 = 1\text{kg}$ . Al suponer que los vínculos son barras sólidas cilíndricas es posible establecer sus momentos de inercia como  $J_i^z = \frac{m_i(2l_i)^2}{12}$ . Considérese además los siguiente parámetros presentes en la salida (16),  $s = 0.15\text{m}$  y  $\mu = 0.7$ . Para la entrada de control auxiliar (20) se propone  $[k_{i_1}]_{i=1,\dots,6} = \text{diag}(2.5, 2.5, 2.5, 6.25, 2.5, 25) = [k_{i_2}]_{i=1,\dots,6}$  y  $\alpha = 0.7$ .

Se considera una perturbación impulsiva horizontal actuando sobre el centro de masa de  $\mathcal{B}_3$  de 66N durante 0.1seg aplicado cuando  $t = 6.6\text{seg}$ , además de una perturbación de los parámetros del robot que producen una desviación de la matriz de inercia  $\mathbf{B}$  de poco mas de 1%,

lo que implica que la matriz de desacoplamiento en el controlador no es exacta. Dichas perturbaciones se realizan con la finalidad de comprobar la robustez del controlador diseñado. Al introducir la desviación de parámetros, el sistema en lazo cerrado no se linealiza de forma exacta, lo que equivale a una perturbación no desvaneciente, que el controlador debe ser capaz de minimizar su efecto. A continuación se destacan algunos aspectos de la solución obtenida correspondientes al modelo y ley de control con los parámetros mencionados arriba.

La simulación fue realizada usando el entorno de Python en conjunto con la librería Sympy para el cálculo del modelo simbólico. La Fig. 2 muestra las componentes de la salida respecto al tiempo en diez pasos del robot y es posible apreciar como convergen a cero justo antes del impacto, lo que significa que el robot adopta una configuración adecuada en cada paso.

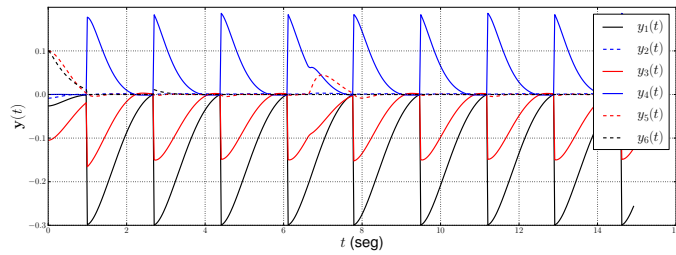


Fig. 2. Respuesta de las componentes  $y_1(t), \dots, y_6(t)$  de la salida.

En la Fig. 3 es posible apreciar los estados correspondientes a la configuración del robot. La Fig. 4 muestra las posiciones angulares contra las velocidades angulares de los vínculos  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  para la pierna que en la condición inicial es la pierna de soporte, donde es posible apreciar la discontinuidad en la velocidad debida al impacto. En la Fig. 5 presenta el torque del tobillo de soporte y el centro de presión. Para el torque del tobillo nótese que es continuo durante cada fase de soporte simple. Para el centro de presión apréciase que se mantiene acotado dentro de una región admisible según la longitud media del pie de soporte (0.15m). La Fig. 6 muestra la locomoción del bípedo como una sucesión de imágenes tomadas de una animación del mismo y que consiste en el movimiento realizado para dar un paso y medio a partir de la configuración inicial.

En las Figs. 2 a 5 es posible apreciar un ciclo de caminado estable, donde el robot entra en un ciclo límite después de algunos pocos pasos. Más aún, el rechazo a la perturbación impulsiva (aplicada en  $t = 6.6\text{seg}$ ) apreciable en cada figura es un fuerte indicativo que el robot efectivamente converge a un ciclo límite estable (incluso pudiera demostrarse asintóticamente estable), mientras se mantiene la validez de la restricción dinámica impuesta por el centro de presión.

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un estudio de modelación y control de la caminata dinámica para un robot plano de 7 vínculos consistentes en un torso y dos piernas incluidos los pies. Los resultados de éste trabajo se pueden sintetizar como sigue:

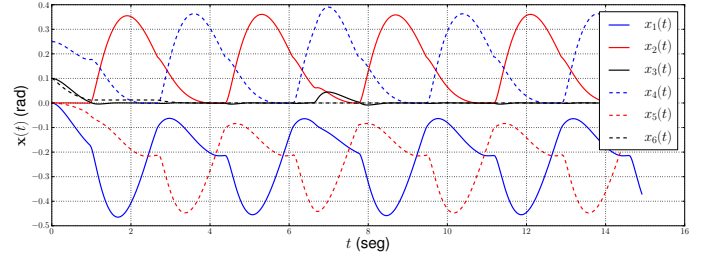


Fig. 3. Respuesta de los estados  $x_1(t), \dots, x_6(t)$ .

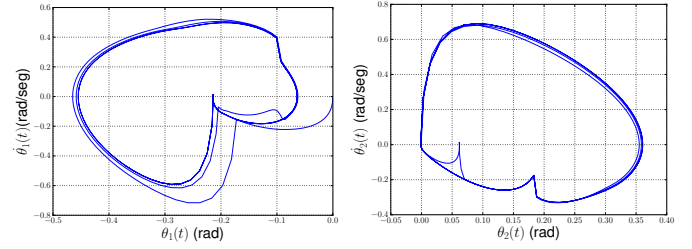


Fig. 4. Posiciones angulares de los vínculos  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  de la pierna que inicia como pierna de soporte.

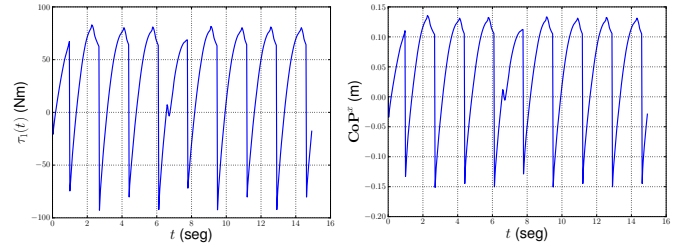


Fig. 5. Torque del tobillo de soporte y centro de presión.

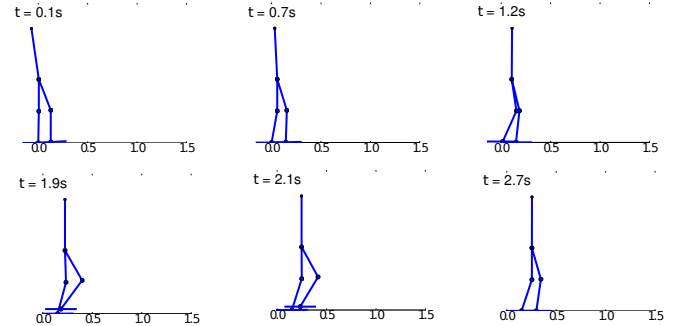


Fig. 6. Capturas de la animación del robot durante el primer paso y medio de su caminata.

- Obtención de un modelo híbrido del robot junto con una restricción dinámica basada en el centro de presión.
- Diseño de una ley de control que mediante una selección adecuada de salidas linealiza el sistema y se auxilia del algoritmo *twisting* para seguir trayectorias deseadas en forma robusta.
- Evaluación de la efectividad y robustez de la ley de control a través de una simulación numérica, obteniendo resultados satisfactorios en el sentido de lograr un ciclo de caminado estable, aún cuando se consideró desviación paramétrica en la ley de control además de una perturbación impulsiva.

Actualmente se trabaja en el estudio analítico de la existencia y estabilidad de órbitas periódicas del sistema, a través de herramientas como mapas de Poincaré.

## REFERENCIAS

- Becerra, H.M., Hayet, J.B., and Sagues, C. (2014). A single visual-servo controller of mobile robots with super-twisting control. *Robotics and Auton. Syst.*, 62(11), 1623–1635.
- Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM J. on Control and Optim.*, 38(3), 751–766.
- Grizzle, J., Abba, G., and Plestan, F. (2001). Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects. *IEEE Tran. on Automatic Control*, 46(1), 51–64.
- Hürmüzlü, Y. and Moskowitz, G.D. (1986). The role of impact in the stability of bipedal locomotion. *Dynamics and Stability of Systems*, 1(3), 217–234.
- Kaddar, B., Aoustin, Y., and Chevallereau, C. (2012). Arms swing effects on a walking planar biped. In *ASME Biennial Conf. on Eng. Systems Design and Analysis*, 293–301.
- Khalil, H.K. and Grizzle, J. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Lebastard, V., Aoustin, Y. and Plestan, F. (2005). Step-by-step sliding mode observer for control of a walking biped robot by using only actuated variables measurement. In *IEEE/RSJ Inter. Conf. on Intel. Robots and Systems*, 559–564.
- Levant, A. and Fridman, L. (2002). Higher order sliding modes. In W. Perruquetti and J. Barbot (eds.), *Sliding Mode Control in Engineering*, 53–101. Marcel Dekker, N.Y., USA.
- Lin, W.B. and Chiang, H.K. (2013). Super-twisting algorithm second-order sliding mode control for a synchronous reluctance motor speed drive. *Mathematical Problems in Eng.*, 2013. doi:10.1155/2013/632061.
- Morris, B. and Grizzle, J. (2005). A restricted Poincaré; map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, 4199–4206.
- Nikkhah, M., Ashrafioun, H., and Fahimi, F. (2007). Robust control of underactuated bipeds using sliding modes. *Robotica*, 25(3), 367–374.
- Orlov, Y., Aoustin, Y., and Chevallereau, C. (2011). Finite time stabilization of a perturbed double integrator-part I: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 56(3), 614–618.
- Ortega, R., Loria, A., and Nicholson, P. (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer, London.
- Plestan, F., Grizzle, J., Westervelt, E., and Abba, G. (2003). Stable walking of a 7-dof biped robot. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 19(4), 653–668.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., and Villani, L. (2009). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer.
- Spong, M.W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons New York.
- Vukobratović, M. and Borovac, B. (2004). Zero-moment point-fthirty five years of its life. *Int. Journal of Humanoid Robotics*, 1(1), 157–173.
- Westervelt, E.R., Grizzle, J.W., Chevallereau, C., Choi, J.H., and Morris, B. (2007). *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. CRC press Boca Raton.
- Ye, H., Michel, A.N., and Hou, L. (1998). Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(4), 461–474.

## Apéndice A. DETALLES DEL MODELO

### A.1 Modelo mecánico

A continuación se detallan de forma explícita algunos términos que fueron introducidos en la elaboración del modelo híbrido de la sección 2. De acuerdo a la convención establecida para los ángulos  $q_i$  es posible expresar las coordenadas cartesianas de cada articulación del robot por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &:= [p^x \ p^y]^T; & \mathbf{P}_2 &:= \mathbf{P}_1 + 2l_1 [-s_1 \ c_1]^T; \\ \mathbf{P}_3 &:= \mathbf{P}_2 + 2l_2 [-s_2 \ c_2]^T; & \mathbf{P}_4 &:= \mathbf{P}_3 + 2l_4 [s_4 \ -c_4]^T; \\ \mathbf{P}_5 &:= \mathbf{P}_4 + 2l_5 [s_5 \ -c_5]^T \end{aligned}$$

donde  $p^x, p^y \in \mathbb{R}$  definen la coordenada cartesiana del tobillo de soporte,  $l_i$  es la longitud media de cada vínculo,  $s_i := \sin q_i$ ,  $c_i := \cos q_i$ . Los centros de masa  $\mathbf{Q}_i$  de los vínculos serán los puntos medios entre articulaciones a excepción del torso cuyo centro de masa está dado por

$$\mathbf{Q}_3 := \mathbf{P}_3 + 2l_3 [-s_3 \ c_3]^T.$$

La matriz de inercia puede ser calculada directamente de la energía cinética como

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

La matriz jacobiana de las coordenadas cartesianas del pie esta dada por

$$\mathbf{J}_{p_5} = \begin{bmatrix} -2l_1c_1 & -2l_2c_2 & 0 & 2l_4c_4 & 2l_5c_5 & 0 \\ -2l_1s_1 & -2l_2s_2 & 0 & 2l_4s_4 & 2l_5s_5 & 0 \end{bmatrix}$$

donde es evidente que es de rango completo. Por otra parte  $\mathbf{J}_{P_\theta} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ .

### A.2 Invertibilidad de la matriz de desacoplamiento

Mediante cálculos directos es posible obtener que  $L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_h(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})$ , siendo  $\mathbf{J}_h(\mathbf{q})$  la matriz jacobiana de  $\mathbf{h}$  respecto a  $\mathbf{q}$ . Puesto que  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  es definida positiva es claro que para la invertibilidad de  $L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x})$  es necesario que  $\mathbf{J}_h(\mathbf{q})$  sea invertible en alguna región de interés. Se considera una función  $\gamma(u) := -\frac{d^2}{c^2}(u - p^x)^2 + d$ , siendo  $d > 0$  un valor que determina la altura máxima del pie de balanceo al dar el paso. Entonces para la definición de  $\mathbf{h}$  en (16) se tiene que el determinante de  $\mathbf{J}_h(\mathbf{q})$  es

$$\det(\mathbf{J}_h(\mathbf{q})) = 8l_1 l_4 l_5 \cos q_1 \sin(q_4 - q_5).$$

Se han elegido los parámetros del cambio de variable (16), de tal forma que el determinante anterior no se anule durante el ciclo de caminado y así garantizar la invertibilidad de la matriz de desacoplamiento.