TEORÍA DE NÚMEROS – TAREA 4

PARA ENTREGAR EL JUEVES 14 DE MARZO

1. Prueba que la suma y el producto de números p-ádicos están bien definidos: si $\{a_n\}, \{a'_n\}, \{b_n\}, \{b'_n\}$ son sucesiones p-ádicamente Cauchy tales que $\{a_n - a'_n\}, \{b_n - b'_n\}$ son p-ádicamente nulas, entonces $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ son p-ádicamente Cauchy y $\{a_n + b_n - (a'_n + b'_n)\}, \{a_n b_n - (a'_n b'_n)\}$ son p-ádicamente nulas.
2. Prueba que si $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio y $\alpha = \{a_n\} \in \mathbb{Q}_p$, entonces
$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$
3. Sea $\alpha = -7425/16$. Calcula $|\alpha|_p$ para todo primo p.
4. Prueba la fórmula del producto: Para todo $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Q}$
$$|\alpha| \prod_{p \text{ primo}} |\alpha|_p = 1.$$
5. Resuelve las siguientes congruencias:
   a) $x^2 \equiv 3 \pmod{7^3}$,
   b) $x^2 \equiv -2 \pmod{3^4}$,
   c) $x^3 + x \equiv 2 \pmod{225}$.