TEORÍA DE NÚMEROS – TAREA 2

PARA ENTREGAR EL JUEVES 7 DE FEBRERO

1. Encuentra el entero positivo x más chico tal que
$$37x \equiv 1 \pmod{101}.$$
2. Calcula $10^{80} \pmod{81}$ y $7^{91} \pmod{100}$ a mano. Puedes usar el teorema de Euler.
3. Resuelve el siguiente sistema de congruencias:
$$2x + 3y \equiv 2 \pmod 5 \qquad x + 2y \equiv 3 \pmod 5,$$
$$x + 2y \equiv 3 \pmod 7 \qquad 4x + 3y \equiv 4 \pmod 7.$$
4. Resuelve el sistema de congruencias
$$x \equiv 7 \pmod{13}, \qquad x \equiv 2 \pmod{16}.$$
5. *a*) Sea $N \equiv 3 \pmod 4$. Muestra que algún factor primo de N es $\equiv 3 \pmod 4$.
   b) Muestra que hay infinitos primos $p \equiv 3 \pmod 4$.
   c) Sea $p \equiv 3 \pmod 4$ primo. Muestra que $(p-1)/2$ es impar.
   d) Muestra que si $p \equiv 3 \pmod 4$ es primo. entonces $x^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod p$ para toda x. (Puedes usar el pequeño teorema de Fermat).
   e) Muestra que hay infinitos primos $p \equiv 1 \pmod 4$.
6. *Números de Fermat.*
   a) Muestra que si $2^m + 1$ es primo, entonces m es una potencia de 2.
   b) El n-ésimo número de Fermat es $F_n = 2^{2^n} + 1$. Muestra que si $a \neq b$ entonces $\mathrm{mcd}(F_a, F_b) = 1$.
   c) Si p es primo y $p \mid F_n$, muestra que $2^{n+1} \mid (p-1)$.
   d) Deduce que hay infinitos primos $\equiv 1 \pmod{2^n}$.
   e) Se desconoce la descomposición en primos de F_{12}.