Funciones Regulares y Racionales de una Variedad Algebraica

En forma analoga que para otras áreas de las matemáticas la geometría algebraica estudia las variedades algebraicas a traves del estudio de las funciones definidas sobre ellas. Se trata en este caso de las funciones regulares y racionales que son definidas localmente por cocientes de funciones polinomiales. El problema es saber cuando dos variedades algebraicas son isomorfas. Para variedades afines este problema se resuelve si via aplicaciones polinomiales existe una biyección entre ellas. Existen otras nociones más debiles (como por ejemplo la equivalencia birracional) que nos da una clases más grandes.

1. Funciones Regulares

En las nociones siguientes observaremos un paralelismo con la teoría de funciones complejas.
Sea V una variedad afín o proyectiva no vací a. En el caso afín sabemos que los elementos $f \in K[V]$ los podemos ver como funciones en V y para el caso proyectivo como funciones en el cono $\tilde{V}$ de V. Dado un abierto $U \subset V$ $U \neq \emptyset$ sea $r : U \longrightarrow L$ una aplicación, tenemos

Definición 0.1 *La función r se llama regular en $P \in U$ si existen $f, g \in K[V]$, donde para el caso proyectivo son homogeneos del mismo grado, tales que:*
a) $P \in D(g) \subset U$
b) $r(Q) = \frac{f(Q)}{g(Q)}$ para todo $Q \in D(g)$ (donde para el caso proyectivo significa que $f(Q)$ y $g(Q)$ pertenecen a un sistema de coordenadas homogeneas de Q).
Para b) decimos que en $D(g)$ se satisface la expresión $r = \frac{f}{g}$. La función r se dice regular en U si lo es para todo punto $P \in U$. Al conjunto de funciones regulares en U lo denotamos por $\mathcal{O}(U)$. Acordamos $\mathcal{O}(\emptyset) = 0$ (el anillo nulidad).

Para el caso proyectivo $\frac{f}{g}$ esta bien definido ya que f y g son homogeneos del mismo grado. Para $r \in \mathcal{O}(U)$ con $U \neq \emptyset$ podemos por **??** y **??** encontrar elementos $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in K[V]$, donde para el caso proyectivo f_i, g_i son homogeneos del mismo grado $(i = 1, \dots, n)$, de tal forma que $U = \cup_{i=1}^{n} D(g_i)$ y tiene la expresión $r_i = \frac{f_i}{g_i}$ en $D(g_i) \quad (i = 1, \dots, n)$. Es claro que las funciones constantes $r : U \longrightarrow L$ con $r(P) = a \in K$ para todo $P \in U$ son regulares. De aquí $\quad K \in \mathcal{O}(U)$.

En forma similar a la teoría de variable compleja debemos considerar la descripción $\frac{f}{g}$ como el analogo a la de series de potencias de las funciones analíticas.

Teorema 0.2 *Suma y productos de funciones regulares en U es de nuevo regular en U. Para cada abierto $U \subset V$, $\mathcal{O}(U)$ tiene la estructura de $K-$álgebra. Las unidades de $\mathcal{O}(U)$ son aquellas funciones regulares sin raices en U.*

Demonstración: Sean r_1 y r_2 regulares en $P \in U$ y $r_i = \frac{f_i}{g_i} \quad (i = 1, 2)$ representantes en las vecindades $p \in D(g_i)$ $(i = 1, 2)$ respectivamente. Tenemos

$$r_1 = \frac{f_1 g_2}{g_1 g_2} \quad \text{y } r_2 = \frac{f_2 g_1}{g_2 g_1} \quad \text{en } D(g_1 g_2)$$

así que $r_1 + r_2 = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}$ y $r_1 r_2 = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}$ son regulares en P.

Si $r \in \mathcal{O}(U)$ no tiene raices en U entonces también $\frac{1}{r} \in \mathcal{O}(U)$ ya que si $r = \frac{f}{g}$ en la vecindad $D(g)$ de P, así $f(P) \neq 0$ y $\frac{1}{r} = gf$ en $D(f)$.

Nota 0.3 *Sea $U' \subset U$ otro abierto de V y $r \in \mathcal{O}(U)$ entonces $r \mid_{U'} \in \mathcal{O}(U)$. La aplicación $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U')$ $(r \mapsto r \mid_{U'}$ es un $K-$homomorfismo.*

Dado $P \in U'$ y $r = \frac{f}{g}$ en la vecindad $D(g)$ de P tomamos por III **??** (ya que los conjuntos $D(g)$ forman una base para la topología) y escribimos $r = \frac{fg'}{gg'}$ en $D(gg') = D(g) \cap D(g') \subset U'$.

De 0.2 y 0.3 tenemos que las funciones regulares tienen la estructura de gavilla sobre V en el sentido de

Definición 0.4 *Sea X un espacio topológico. Un sistema $\{\mathcal{O}(U), \rho^U_{U'}\}_{U' \subset U abiertos}$ se llama gavilla de $K-$álgebras sobre X, si para cada abierto $U \subset X$ tenemos una $K-$álgebra $\mathcal{O}(U)$ y para cada pareja de abiertos $U' \subset U$ de X tenemos un $K-$homomorfismo $\rho^U_{U'}$: $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U')$ de tal forma que*
G1) Dados $U'' \subset U' \subset U$ abiertos de X tenemos

$$\rho^U_{U''} = \rho^{U'}_{U''} \odot \rho^U_{U'} \quad y \ \rho^U_U = I_{\mathcal{O}(U)}$$

G2) Dado $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ con abiertos U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ y dado $r_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ tales que $\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}(r_\lambda)} = \rho^{U_{\lambda'}}_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}(r_{\lambda'})}$ para todo $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ existe exactamente un $r \in \mathcal{O}(U)$ tal que $rho^U_{U_\lambda}(r) = r_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$

Al homomorfismo $rho^U_{U'}$ lo llamamos homomorfismo de restricción y lo denotamos $rho^U_{U'}(r) = r \mid_{U'}$ $r \in \mathcal{O}(U)$.

Existen gavillas de conjuntos, grupos, anillos, espacios vectoriales, etc. Las aplicaciones $rho^U_{U'}$ deben ser morfismos de dichas categorias, es decir, morfismos por ejemplo, de grupos, anillos o aplicaciones lineales, etc. Renunciando en 0.4 de G2) hablamos entonces de una pregavilla de $K-$álgebras.

Para el caso de funciones regulares en variedades algebraicas claramente satisfacen los axiomas de gavillas dado que la noción de regularidad es una noci"on local.

Definición 0.5 *Una pareja $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de anillos en X se llama espacio anillado. A $\mathcal{O}_X$ se le da el nombre de gavilla estructural del espacio anillado.*

Ejemplos de tales espacios aparte de las variedades algebraicas son los espacios topolgícos con su gavilla de funciones continuas, las variedades diferenciables con las funciones C^k-diferenciables, superficies de Riemann con la gavilla de funciones analíticas, etc.

Dado $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $U \subset X$ abierto, entonces $(U, \mathcal{O}_X \mid_U)$ también es espacio anillado (la restricción a U). Aqui tenemos que para cada abierto $U' \subset U$ por definición $\mathcal{O}_x \mid_{U'} = \mathcal{O}_X(U')$. Llamamos a $\mathcal{O}_X \mid_U$ la restricción de la gavilla estructural a U.

En lo subsecuente denotaremos a la gavilla de funciones regulares sobre V unicamente por $\mathcal{O}$. Para abiertos de la forma $D(g)$ podemos describir los anillos $\mathcal{O}(D(g))$ de la siguiente manera.

Teorema 0.6 *Sea $g \in K[V] \backslash \{0\}$ (donde para el caso proyectivo g es homogeneo de grado positivo). Cada $r \in \mathcal{O}(d(g))$ tiene una representación sobre todo $D(g)$ de la forma $r = \frac{f}{g^\nu}$ con $f \in K[V] \quad \nu \in \mathbb{N}$ (donde para el caso proyectivo f es homogeneo y $\deg f = \nu \deg g$.*

Para el caso afin

$$\mathcal{O}(D(g)) \cong K[V]_g$$

la localización de $K[V]$ en el conjunto multiplicativamente cerrado $\{1, g, g^2, \ldots\}$. Pare el caso proyectivo

$$\mathcal{O}(D(g)) \cong K[V]_{(g)}$$

es la localización homogenea de $K[V]$ en el conjunto $\{1, g, g^2, \ldots\}$.

En ambos $\mathcal{O}(D(g))$ es anillo de Noether.

Demonstración: Dado $r \in \mathcal{O}(D(g))$ de III**??** tenemos la representación $r = \frac{f_i}{g_i}$ en los conjuntos $D(g_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$ donde $D(g) = \cup_{i=1}^n D(g_i)$. En $D(g_i) \cap D(g_j)$ tenemos $f_i g_j - f_j g_i = 0$ así tenemos que $g_i g_j (f_i g_j - f_j g_i) = 0$ en $V \quad (i, j = 1, \ldots, n)$. Escribiendo $r = \frac{f_i g_i}{g_i^2}$ en $D(g_i)$ podemos suponer desde un principio que $f_i g_j - f_j g_i = 0$ en V, esto significa que $f_i g_j = f_j g_i$ en $K[V]$.

Del hecho que $D(g) = \cup_{i=1}^n D(g_i)$ tenemos que $g \in Rad(g_1, \ldots, g_n)$ (para el caso proyecitvo también se satisface ya que por hipotesis $\deg g > 0$). Tenemos entonces

$$g^\nu = \Sigma_{i=1n}^n h_i g_i$$

con $h_i \in K[V]$ (donde para el caso proyectivo son homogeneos con $\deg h_i + \deg g_i = \nu \deg g$). Tomando ahora $f = \sum_{i=1}^n h_i f_i$ tenemos

$$g^\nu f_j = \sum_{i=1}^n (h_i g_i) f_j = \sum_{i=1}^n (h_i f_i) g_j = f g_j$$

así que $r = \frac{f_j}{g_j} = \frac{f}{g^\nu}$ en $D(g_i) \quad (j = 1, \ldots, n)$, es decir, $r = \frac{f}{g^\nu}$ en $D(g)$.

Tenemos de esta forma un $K-$homomorfismo suprayectivo $K[V]_g \longrightarrow \mathcal{O}(D(g))$ (resp. $K[V]_{(g)} \longrightarrow \mathcal{O}(D(g))$) donde a cada cociente $\frac{f}{g^\nu}$ le asociamos su función regular correspondiente. Si la imagn de $\frac{f}{g^\nu}$ es la funcion cero entonces $f \cdot g = 0$ en $K[V]$ y $\frac{f}{g^\nu} = 0$ en

$K[V]_g$ (resp. en $K[V]_{(g)}$) esto es, dicho $K-$homomorfismo es biyectivo. □

Corolario 0.7 *Para una $K-$variedad afin V $\mathcal{O}(V) \cong K[V]$*

Demonstración: Ya que $V = D(1)$ el resultado se sigue de 0.6 □

Para el caso proyectivo no podemos argumentar de esta manera ya que $\deg g > 0$. Este caso lo trataremos en **??**.

Para el caso de la teoría de funciones de variable compleja el analogo a 0.6 nos dice que en un disco una función holomorfa posee una representación como serie de potencia valida en todo el disco. Por cierto que el anillo de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ no es un anillo de Noether.

Lema 0.8 *Sea $U \subset V$ y $r \in \mathcal{O}(U)$. El conjunto nulidad $A := \{P \in U \mid r(P) = 0\}$ es cerrado en U.*

Demonstración: Sea $Q \in U \setminus A$ y $r = \frac{f}{g}$ en $D(g)$ con $Q \in D(g) \subset U$. Entonces $f(Q) \neq 0$ y $D(f) \cap D(g)$ es una vecindad abierta de Q donde r no se anula. □

Teorema 0.9 Teorema de identidad *Sean $U_i \subset V$ abiertos y $r_i \in \mathcal{O}(U_i)$ $(i = 1, 2)$. Si existe U un abierto denso de V con $U \subset U_1 \cap U_2$ tal que $r_1 |_U = r_2 |_U$ entonces*

$$r_1 |_{U_1 \cap U_2} = r_2 |_{U_1 \cap U_2}$$

Demonstración: Sea $U' := U_1 \cap U_2$ y $r := r_1 |_{U'} - r_2 |_{U'}$. El conjunto nulidad A de r contiene al abierto denso U de V. Ya que de 0.8 A es cerrado en U' tenemos $A = U'$ y así que $r_1 |_{U'} = r_2 |_{U'}$. □