



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 1

Teoría de la medida

Sea $\{P_k\} = \{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de proposiciones lógicas:

- Decimos que $\{P_k\}$ es cierto **frecuentemente** si y solo si para todo $k_0 \geq 1$ existe algún $k \geq k_0$ tal que P_k es cierto.
- Decimos que $\{P_k\}$ es cierto **eventualmente** si y solo si existe $k_0 \geq 1$ tal que P_k es cierto para todo $k \geq k_0$.

1. Demuestra que si $\{P_k\}$ es cierto eventualmente, entonces también es cierto frecuentemente. Da un contraejemplo que muestre que el recíproco no es necesariamente cierto.
2. Demuestra que $\{P_k\}$ no es cierto frecuentemente si y solo si $\{P_k\}$ es falso eventualmente (es decir que las negaciones son ciertas eventualmente).
3. Sean $\{E_k\}$ una sucesión de subconjuntos de un dado conjunto X , y sea también $x \in X$.

(a) Demuestra que

$$x \in \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

si y solo si $x \in E_k$ frecuentemente.

(b) Demuestra que

$$x \in \liminf_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

si y solo si $x \in E_k$ eventualmente.

4. Sea $\{x_k\}$ una sucesión de números reales, y sea también $x \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que

$$x \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k$$

si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $x - \varepsilon < x_k$ frecuentemente.

- (b) Demuestra que $x \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $x + \varepsilon > x_k$ eventualmente.

5. Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones de X en $\mathbb{R}$, y sea también $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que f_k converge uniformemente a f si y solo si para todo $\varepsilon > 0$,

$$\{|f - f_k| > \varepsilon\} = \{x \in X \mid |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\} = \emptyset \text{ eventualmente.}$$

(b) Demuestra que f_k converge puntualmente a f si y solo si para todo $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \{|f - f_k| > \varepsilon\} = \emptyset.$$

(c) Deduce que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual. Da además un contraejemplo que ilustre que el recíproco no es necesariamente cierto.



CIMAT
Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 2 y 3

Teoría de la medida

Dado $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ denotamos por $f_{\pm} := \max\{\pm f, 0\}$ las partes positivas y negativas.

Para $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definimos

$$\sum f := \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) \mid F \subseteq X \text{ finito} \right\}.$$

Sea $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Si ambas sumas $\sum f_{\pm}$ son finitas decimos que f es absolutamente sumable y definimos $\sum f := \sum f_{+} - \sum f_{-}$.

1. (Monotonicidad) Demuestra que para $f \leq g$ absolutamente sumables $\sum f \leq \sum g$.
2. Demuestra que $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es absolutamente sumable si y solo si $\sum |f| < \infty$.
3. (Desigualdad triangular) Demuestra que para $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ absolutamente sumable $|\sum f| \leq \sum |f|$.
4. (Markov) Demuestra que para $f: X \rightarrow [0, \infty]$ y $\lambda > 0$,

$$\#\{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \sum f.$$

5. Demuestra que para $f: X \rightarrow [0, \infty]$,

$$\sum f < \infty \quad \Rightarrow \quad \{f > 0\} \text{ es un conjunto numerable.}$$

6. Demuestra que para $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ absolutamente sumable

$$\sum f = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) \tag{1}$$

donde $\{x_n\}$ es una enumeración arbitraria de $\{f \neq 0\}$.

7. (Convergencia monótona) Sea $\{f_k\}$ una sucesión creciente de funciones de X en $[0, \infty]$. Demuestra que

$$\sum_{x \in X} \sup_k f_k(x) = \sup_k \sum_{x \in X} f_k(x).$$

8. (Fatou) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones de X en $[0, \infty]$. Demuestra que

$$\sum_{x \in X} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{x \in X} f_k(x).$$

9. (Convergencia dominada) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones de X en $[-\infty, \infty]$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ está bien definido para todo $x \in X$. Demuestra que

$$\sum_{x \in X} \sup_k |f_k(x)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{x \in X} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{x \in X} f_k(x).$$

Pista: Aplica el lema de Fatou a $\sup_j |f_j| \pm f_k$.

10. (Fubini) Demuestra que para $f: X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ absolutamente sumable

$$\sum_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} f(x,y).$$

11. Dado $p \geq 1$, sea $|\cdot|_p: [-\infty, \infty]^X \rightarrow [0, \infty]$ tal que

$$|f|_p := \left(\sum_{x \in X} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Demuestra que $|\cdot|_p$ es homogénea¹ y convexa.

Pista: Basta demostrar que $\{|\cdot|_p < 1\} = \{|\cdot|_p^p < 1\}$ es convexo.

12. (Minkowski) Demuestra que para $f: X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ absolutamente sumable

$$\left(\sum_{x \in X} \left| \sum_{y \in Y} f(x,y) \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} |f(x,y)|^p \right)^{1/p}.$$

¹ $|cf|_p = c|f|_p$ para $c \geq 0$.



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 4

Teoría de la medida

1. Dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, considera la relación en $\mathcal{M}$ dada por:

$$E \sim F \text{ si y solo si } \mu(E \Delta F) = 0.$$

- (a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.
 - (b) Demuestra que μ está bien definida en el conjunto de clases de equivalencias. Es decir, que si $E \sim F$, entonces $\mu(E) = \mu(F)$.
 - (c) Dados $E, F \in \mathcal{M}$, sea $d(E, F) := \mu(E \Delta F)$. Demuestra que d está bien definido en el conjunto de clases de equivalencias y además define una métrica.
2. Sea $\rho: \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ y $\rho(\emptyset) = 0$. Demuestra que el espacio de medida generado por estos datos es completo. Es decir que para todo $E \subseteq N \in \mathcal{M}(\mu_*)$ con $\mu_*(N) = 0$, se tiene necesariamente que $E \in \mathcal{M}(\mu_*)$.
3. (Borel-Cantelli) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestra que para $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i\right) = 0.$$

¿Es válido el recíproco?

4. Considera $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, la recta real con la sigma-álgebra de Borel, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$, y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ también medible. Demuestra que si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{|f_i - f| > \varepsilon\}) < \infty,$$

entonces $\{f_i\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto.



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 5

Teoría de la medida

1. Sea $\{f_k\}$ y f funciones medibles de $(X, \mathcal{M})$ en $(\mathbb{R}, \text{Borel})$ tales que $f_k \rightarrow f$ en casi todo punto

(a) Demuestra que si $\{f_k\}$ son no-negativas y

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu < \infty,$$

entonces para todo $E \in \mathcal{M}$ también se tiene que

$$\int_E f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

(b) Muestra que la conclusión no es necesariamente válida si asumimos en cambio que

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \infty.$$

2. Asume que $f_k \rightarrow f$ y $g_k \rightarrow g$, ambos en medida

(a) Demuestra que $f_k + g_k \rightarrow f + g$ en medida.

(b) Demuestra que $f_k g_k \rightarrow f g$ en medida si $\mu(X) < \infty$, pero no necesariamente si $\mu(X) = \infty$.

3. Justifica por qué el teorema de convergencia monótona, el lema de Fatou, y el teorema de convergencia dominada son válidos si $f_k \rightarrow f$ bien sea en casi todo punto, en medida, o en L^p .

4. Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, $T: X \rightarrow Y$ un mapeo medible, y $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ una medida. Se define el push-forward $T_{\#}\mu: \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$ tal que

$$T_{\#}\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)).$$

(a) Demuestra que $T_{\#}\mu$ es una medida.

(b) Demuestra la fórmula de cambio de variables: Para toda $f \in L^1(Y, T_{\#}\mu)$ se tiene que $f \circ T \in L^1(X, \mu)$ y

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_Y f dT_{\#}\mu.$$



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 6

Teoría de la medida

Lee sobre la construcción del conjunto y la función de Cantor bien sea en el libro de Folland, en el Stein-Shakarchi o en Wikipedia.

1. Demuestra que el conjunto de Cantor satisface las siguientes propiedades:
 - (a) Es totalmente desconexo: Es decir que si $x, y \in \text{Cantor}$, entonces existe $z \notin \text{Cantor}$ entre x e y .
 - (b) Para todo $x \in \text{Cantor}$, existe una sucesión en $\text{Cantor} \setminus \{x\}$ que converge a x .
2. Demuestra que la función de Cantor $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, sobreyectiva, y diferenciable en casi todo punto con derivada igual a cero. En particular da un contraejemplo para el teorema fundamental del cálculo

$$\int_0^1 f' dx = 0 < 1 = f(1) - f(0).$$

3. Se define la sucesión de funciones $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (también conocida como typewriter) como

$$f_k = \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]}, \quad 2^n \leq k < 2^{n+1}$$

1. Demuestra que estas convergen en medida pero no en casi todo punto.
 2. Da una subsucesión que converja en casi todo punto.
4. En este problema buscamos demostrar que una función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada es Riemann integrable si y solo si su conjunto de discontinuidades es nulo. Recuerde-mos que f es Riemann integrable si y solo si se tiene que

$$\overline{\int_0^1} f dx = \underline{\int_0^1} f dx$$

donde la integral superior se define como

$$\overline{\int_0^1} f dx = \inf \{a_1 \ell(I_1) + \dots + a_n \ell(I_n) \mid \{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I} \text{ partición de } [0, 1], \\ f \leq a_1 \mathbb{1}_{I_1} + \dots + a_n \mathbb{1}_{I_n}\},$$

mientras que la inferior

$$\int_0^1 f dx = \sup \{a_1 \ell(I_1) + \dots a_n \ell(I_n) \mid \{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I} \text{ partición de } [0, 1], \\ f \geq a_1 \mathbb{1}_{I_1} + \dots + a_n \mathbb{1}_{I_n}\}.$$

Usaremos la oscilación la cual se define en este caso para $E \subseteq [0, 1]$ como

$$\operatorname{osc}_E f = \sup_E f - \inf_E f.$$

Puntualmente en $x \in [0, 1]$ definimos

$$\operatorname{osc}_x f = \lim_{r \rightarrow 0^+} \operatorname{osc}_{(x-r, x+r)} f.$$

- (a) Sea $\varepsilon > 0$. Demuestra que si f es Riemann integrable, entonces $\{\operatorname{osc} f \geq \varepsilon\} = \{x \in [0, 1] \mid \operatorname{osc}_x f \geq \varepsilon\}$ tiene medida cero.
- (b) Demuestra que para $\varepsilon > 0$, se tiene que $\{\operatorname{osc} f \geq \varepsilon\}$ es compacto.
- (c) Demuestra que para $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\int_0^1 f \mathbb{1}_{\{\operatorname{osc} f < \varepsilon\}} dx} - \int_0^1 f \mathbb{1}_{\{\operatorname{osc} f < \varepsilon\}} dx \leq \varepsilon.$$

- (d) Demuestra que si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero, entonces f es Riemann integrable.
- (e) Describe brevemente como se puede ajustar este argumento para extender el resultado a una función $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada con $R \in \mathcal{R}_d$ acotado con $d \geq 1$.



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 7

Teoría de la medida

1. Considera $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ medible:
 - (a) Asumiendo que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función simple $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$.
 - (b) Asumiendo que $f = \mathbb{1}_E$ con $m(E) < \infty$, demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$.¹
 - (c) (Lusin) Asumiendo que $f = 0$ fuera de un conjunto acotado, demuestra para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\Sigma \in \text{Lebesgue}(\mathbb{R}^d)$ tal que $m(\Sigma) < \varepsilon$ y $f|_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma}$ es continua.²
2. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, considera las σ -álgebras $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{M} \mid \mu(N) = 0\}$ y

$$\overline{\mathcal{M}} := \{A \subseteq X \mid A \Delta B \subseteq N \in \mathcal{N} \text{ para algún } B \in \mathcal{M} \text{ y } N \in \mathcal{N}\}.$$

- (a) Demuestra que existe una única extensión $\overline{\mu}: \overline{\mathcal{M}} \rightarrow [0, \infty]$ de μ tal que $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ es el menor posible espacio completo que extiende a $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Esta construcción se denomina la completación de $(X, \mathcal{M}, \mu)$.
 - (b) Demuestra que para cualquier función $\overline{\mathcal{M}}$ -medible $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ existe una función $\mathcal{M}$ -medible $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = g$ en $\overline{\mu}$ -casi todo punto.
3. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida finita y completos³.
 - (a) Sea $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ una función $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ -medible. Demuestra que f_x es $\mathcal{N}$ -medible para μ -casi todo $x \in X$, $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ es $\mathcal{M}$ -medible y

$$\int_{X \times Y} f d(\overline{\mu} \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu.$$

- (b) Sea $f \in L^1(\overline{\mu} \times \nu)$. Demuestra que $f_x \in L^1(Y, \mathcal{N}, \nu)$ para μ -casi todo $x \in X$, $x \mapsto \int_Y f_x d\nu \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ y

$$\int_{X \times Y} f d(\overline{\mu} \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu.$$

- (c) ¿Es posible generalizar este resultado a espacios de medida σ -finita?

¹Pista: Usa una aproximación de E con un conjunto abierto por fuera y cerrado por dentro.

²Pista: Usa el Teorema de Egorov.

³Pista: El resultado del problema 2.b puede ser útil.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ medible

(a) Demuestra que para todo $c > 0$, $g_1(x, y) := f(cx, y)$ es medible y⁴

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_1 dm = c \int_{\mathbb{R}^2} f dm.$$

(b) (Opcional, es parecido al anterior). Demuestra que $g_2(x, y) := f(-x, y)$, $g_3(x, y) := f(y, x)$, y $g_4(x, y) := f(x, y + x)$ son medibles y

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_k dm = \int_{\mathbb{R}^2} f dm.$$

(c) (Puedes usar el opcional, así no los hayas demostrado). Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una biyección lineal, demuestra que $g := f \circ T$ es medible y

$$|\det T| \int_{\mathbb{R}^2} g dm = \int_{\mathbb{R}^2} f dm.$$

¿Es posible generalizar esta estrategia a otras dimensiones?

⁴Pista: Basta demostrarlo para f (Borel($\mathbb{R}^2$), Borel($\mathbb{R}$))-medible y luego usar 2.b.



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 8

Teoría de la medida

1. Sea $E \in \text{Leb}(\mathbb{R})$ tal que $m(E) > 0$.

(a) Demuestra que para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ existe un intervalo I tal que

$$\frac{m(E \cap I)}{m(I)} > 1 - \varepsilon.$$

(b) Demuestra que el conjunto

$$E - E := \{x - y \mid x, y \in E\}$$

contiene un intervalo centrado en cero.

2. Dado $d \geq 1$, demuestra que existen constantes $c, C > 0$ tal que lo siguiente se cumple: Para cualquier $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto existe una partición $\mathcal{Q}$ de U por cubos tal que para todo $Q_\ell(x) \in \mathcal{Q}$ se tiene que

$$c\ell < \text{dist}(Q_\ell(x), \mathbb{R}^d \setminus U) < C\ell$$

3. Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $m(\mathbb{R} \setminus F) < \infty$, $\delta(x) := \text{dist}(x, F)$, e

$$I(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|y - x|^2} dy.$$

(a) Demuestra que $|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x - y|$.

(b) Demuestra que $I = \infty$ en $\mathbb{R} \setminus F$.

(c) Demuestra que $I < \infty$ en casi todo punto de F .



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 9

Teoría de la medida

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible. Dada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $p > 0$, definimos

$$\|f\|_{p,\infty} := \inf\{M > 0 \mid \lambda\mu(|f| > \lambda)^{1/p} \leq M \text{ para todo } \lambda > 0\}.$$

Decimos que $f \in L^{p,\infty}$ si y solo si $\|f\|_{p,\infty} < \infty$. Una sucesión $\{f_k\}$ converge a f en $L^{p,\infty}$ si y solo si $\|f_k - f\|_{p,\infty}$ tiende a cero.

1. ($L^p \subsetneq L^{p,\infty}$) Demuestra que

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_p.$$

Da un ejemplo para el cual $\|f\|_p = \infty$ pero $\|f\|_{p,\infty} < \infty$.

2. (Desigualdad triangular) Demuestra que

$$\|f + g\|_{p,\infty} \leq \max\{2, 2^{1/p}\}(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}).$$

Concluye que $L^{p,\infty}$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_{p,\infty}$ es una quasi-norma.

3. Demuestra que si $\{f_k\}$ converge a f en $L^{p,\infty}$, entonces también converge en medida. Da un ejemplo para ver que los tipos de convergencia no son necesariamente equivalentes.
4. ($L^{p,\infty} \subseteq L^{p_0} + L^{p_1}$) Demuestra que para $0 < p_0 < p < p_1$ se tiene que si $f \in L^{p,\infty}$, entonces $f\mathbb{1}_{\{|f|>1\}} \in L^{p_0}$ y $f\mathbb{1}_{\{|f|\leq 1\}} \in L^{p_1}$ ¹.
5. ($L^{p_1,\infty} \subsetneq L^{p_0}$) Dado $0 < p_0 < p_1$, demuestra que para $\mu(X) < \infty$ existe una constante $C > 0$ que depende de p_0, p_1 , y $\mu(X)$ tal que²

$$\|f\|_{p_0} \leq C\|f\|_{p_1,\infty}.$$

Da un ejemplo para el cual $\mu(X) < \infty$, $\|f\|_{p,\infty} = \infty$ para todo $p > p_0$, pero $\|f\|_{p_0} < \infty$ ³.

¹Usa que $\int_X |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \mu(|f| > \lambda) \lambda^{p-1} d\lambda$.

²Estima $\int_0^\infty \mu(|f| > \lambda) \lambda^{p-1} d\lambda$ partiendo el intervalo $(0, \infty)$ como $(0, t) \cup (t, \infty)$. A continuación optimiza sobre t .

³ $f(x) = x^\alpha |\ln x|^\beta$ en algún intervalo de la forma $(0, \gamma)$.

6. (Hölder) Demuestra que para $p, q \in [1, \infty)$ tales que $1/p + 1/q = 1$ existe $C > 0$ dependiendo de p y q tal que⁴

$$\|fg\|_{1,\infty} \leq C\|f\|_{p,\infty}\|g\|_{q,\infty}.$$

7. (Interpolación) Demuestra que para $0 < p_0 \leq p \leq p_1$ y $\theta \in [0, 1]$ tal que $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$ se tiene que

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_{p_0,\infty}^{1-\theta} \|f\|_{p_1,\infty}^{\theta}.$$

⁴Toma $\|f\|_{p,\infty} = \|g\|_{q,\infty} = 1$ y usa que para $\lambda, t > 0$

$$\mu(|fg| > \lambda) \leq \mu(|f| > \lambda t) + \mu(|g| > t^{-1}) \leq (\lambda t)^p + t^{-q}.$$

A continuación optimiza sobre t .



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 10

Teoría de la medida

Sean ν, μ medidas signadas sobre el espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Asumimos además que μ es positiva (es decir una medida).

1. Demuestra que si $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$, entonces $\nu = 0$.
2. Demuestra que $\mathcal{M}_{\nu=0} = \mathcal{M}_{|\nu|=0}$.
3. Demuestra que $\nu \perp \mu$ si y solo si $|\nu| \perp \mu$.
4. Demuestra que $\nu \ll \mu$ si y solo si $|\nu| \ll \mu$.
5. Demuestra que

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) \mid F \subseteq E \text{ medible}\}.$$

6. Asumiendo que ν es finita, demuestra que $\nu \ll \mu$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) < \delta$, entonces $\nu(E) < \varepsilon$.
7. Dado $f \in L^1(\mathbb{R})$, demuestra que $F(x) := \int_{-\infty}^x f(t)dt$ es absolutamente continua. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ son intervalos disjuntos tales que $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, entonces $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.
8. Demuestra el Teorema de descomposición de Jordan.



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 11

Teoría de la medida

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos las derivadas de Dini de la siguiente forma:

$$\overline{D^+}f(x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (x \neq b)$$

$$\underline{D^+}f(x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (x \neq b)$$

$$\overline{D^-}f(x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (x \neq a)$$

$$\underline{D^-}f(x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (x \neq a)$$

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la envolvente decreciente $Tf: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$Tf(x) := \inf\{\varphi(x) \mid \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ no-creciente y } \varphi \geq f\}.$$

1. Calcula las derivadas de Dini en cero para

$$f(x) := (x \sin(1/x) + 2|x|)\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(x).$$

2. Sea $g(x) := f(-x)$. Demuestra que $\overline{D^+}g(x) = -\underline{D^-}f(-x)$.
3. Demuestra que f es diferenciable en x si y solo si $\overline{D^+}f(x) \leq \underline{D^-}f(x)$ y $\overline{D^-}f(x) \leq \underline{D^+}f(x)$.
4. Demuestra que si $f \in C([a, b])$, entonces las derivadas de Dini son funciones medibles.
5. Demuestra que si $f \in C([a, b])$, entonces Tf está bien definida, es continua, y decreciente.
6. (Rising sun lemma) Dado $f \in C([a, b])$ no-decreciente y $\lambda > 0$, sea $f_\lambda(x) := f(x) - \lambda x$. Demuestra que

$$\{\overline{D^+}f > \lambda\} \subseteq \{Tf_\lambda > f_\lambda\} = \bigcup_{k \geq 1} (a_k, b_k),$$

donde los intervalos son disjuntos y además

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \geq \lambda.$$

7. Demuestra que si $f \in C([a, b])$ es no-decreciente, entonces para todo $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$

$$m(\{\overline{D^+}f > \lambda\} \cap (\alpha, \beta)) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\lambda}.$$

8. Dado $f \in C([a, b])$ no-decreciente y $0 < \lambda < \Lambda$ demuestra que

$$\{\overline{D^+}f > \Lambda > \lambda > \underline{D_-}f\} = \bigcup_{k \geq 1} \{\overline{D^+}f > \Lambda\} \cap (a_k, b_k)$$

donde los intervalos son disjuntos y además

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \leq \lambda.$$

9. Dado $f \in C([a, b])$ no-decreciente y $0 < \lambda < \Lambda$ demuestra que

$$m(\{\overline{D^+}f > \Lambda > \lambda > \underline{D_-}f\}) \leq \frac{\lambda}{\Lambda}(b - a).$$

10. Dado $f \in C([a, b])$ no-decreciente, demuestra que f es diferenciable en casi todo punto.



CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Tarea 12

Teoría de la medida

1. Verdadero o falso:

- (a) Es válido el teorema de diferenciación de Lebesgue para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$
- (b) Existe $E \in \text{Leb}(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap B_r(x))}{m(B_r)} = \frac{1}{2}\right\}\right) > 0.$$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sea $\Sigma_\alpha \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que

$$\Sigma_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(y) - \alpha| dy \neq |f(x) - \alpha|\right\}.$$

Este conjunto también incluye puntos donde el límite no existe. Demuestra que para $\Sigma := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \Sigma_\alpha$ se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Sigma$$

Concluye que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Los puntos $x \in \mathbb{R}^d$ para los cuales $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0$, se conocen como los puntos de Lebesgue de f .

3. Sea $E_r(x) \subseteq B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^d$ medible tal que

$$\inf\{r^{-d}m(E_r(x)) \mid r > 0, x \in \mathbb{R}^d\} > 0.$$

- (a) Demuestra que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(E_r(x))} \int_{E_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

- (b) Demuestra que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(E_r(x))} \int_{E_r(x)} f(y) dy = f(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

4. Sea $K_r(x) := r^{-d}K_1(x/r)$ donde $K_1(x) = \pi^{-d/2}e^{-|x|^2}$:

- (a) Demuestra que para todo $p \in [1, \infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $K_r * f \rightarrow f$ en L^p cuando $r \rightarrow 0^+$.
- (b) Demuestra que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $K_r * f \rightarrow f$ en casi todo punto.
5. Dado $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{R}$, sea $Q_r(x, t) = B_r(x) \times (t - r^2, t + r^2) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Demuestra que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(Q_r(x, t))} \iint_{Q_r(x, t)} f(y, s) dy ds = f(x, t) \text{ para casi todo } (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$