TEOREMA DE RADON-NIKODYM

HÉCTOR A. CHANG-LARA

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, podemos definir nuevas medidas sobre $\mathcal{M}$ a partir de funciones $f\colon X \to [0,\infty]$ medibles de la forma

$$\mu_f(E) := \int_E f d\mu.$$

¿Son todas las posibles medidas de esta forma? No necesariamente, por ejemplo la delta de Dirac no se puede obtener de esta forma a partir de la medida de Lebesgue. Observamos que en la construcción de μ_f, los conjuntos nulos de μ_f contiene a los conjuntos nulos de μ, cosa que no ocurre con la delta para la cual $\{0\}$ no es nulo.

Definición 1. *Dadas dos medidas μ, ν sobre un mismo espacio medible $(X, \mathcal{M})$, decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ ($\nu \ll \mu$) si y solo si todo $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$, también cumple que $\nu(N) = 0$.*

De la definición de la integral se sigue que cualquier medida de la forma μ_f es absolutamente continua con respecto a μ.

Tomando en cuenta el ejemplo de la delta y la medida de Lebesgue observamos que podemos descomponer la recta real en dos conjuntos complementarios tales que m y δ cargan la totalidad de sus medidas en cada uno de ellos por separado. Por ejemplo, $m(\{0\}) = \delta(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = 0$. Esto motiva el siguiente concepto complementario a la continuidad absoluta.

Definición 2. *Dadas dos medidas μ, ν sobre un mismo espacio medible $(X, \mathcal{M})$, decimos que ν es singular con respecto a μ ($\nu \perp \mu$) si y solo si existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(X\backslash E) = \nu(E) = 0$.*

El teorema de Radon-Nikodym nos garantiza que si μ es finita, entonces cualquier otra medida finita sobre $\mathcal{M}$ se obtiene como la combinación de una parte absolutamente continua y otra singular.

Teorema 1. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Para cualquier medida finita ν existe una única $f \in L^1(X)$ no negativa y una medida $\nu_s \perp \mu$ tal que*

$$\nu = \mu_f + \nu_s.$$

La condición de que las medidas sean finitas puede ser relajado a medidas σ-finitas de forma rutinaria.

Por ejemplo, si $\mu = m$ y $\nu = m + \delta$ tenemos que $f = \mathbb{1}$, $\mu_f = m \ll m$, y $\nu_s = \delta \perp m$.

Si en cambio tomamos $\mu = m + \delta$ y $\nu = m$ tenemos que $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash\{0\}}$, y $\nu_s = 0 \perp \mu$. Tengamos en cuenta que $\{0\}$ no es un conjunto nulo para $\mu = m + \delta$.

La unicidad de la descomposición implica que si $\nu \ll \mu$, entonces $\nu = \mu_f$ para una única $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$. Denotamos en este caso a la función $f = d\nu/d\mu$ como la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ.

La medida de contar # no es σ-finita en $(\mathbb{R}, \mathrm{Borel}(\mathbb{R}))$ y el teorema no podría aplicarse en este caso. Observamos que $\nu = m \ll \mu = \#$, sin embargo $m \neq \mu_f$ para ninguna $f \in L^1(\mathbb{R}, \#)$. Tampoco es posible descomponer $\nu = \#$ con respecto a $\mu = m$.

Para poder dar la demostración del Teorema de Radon-Nikodym es natural considerar la diferencia de medidas, dado que una vez dado un candidato para f, basta ver que $(\nu - \mu_f) \perp \mu$. Es conveniente además considerar casos en los que esta diferencia tome valores negativos, lo cual nos lleva a extender la noción de medidas a medidas signadas, es decir que posiblemente toman tanto valores positivos como negativos.

1. Medidas signadas

Definición 3. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una función $\nu \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se dice una medida signada si y solo si satisface los siguientes axiomas:*

1. *$\nu(\varnothing) = 0$,*
2. *Si $\{\nu = \infty\} \neq \varnothing$, entonces $\{\nu = -\infty\} = \varnothing$.*
3. *Dada una sucesión $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$ disjunta, se tiene que*

$$\nu\left(\bigcup_{k\geqslant 1} E_k\right) = \sum_{k\geqslant 1} \nu(E_k).$$

Si ν es una medida, es decir que toma valores no-negativos, podríamos decir que es una medida *positiva* con el propósito de hacer énfasis, a pesar de que sea redundante.

En la propiedad de aditividad de ν observamos que la unión $\bigcup_{k\geqslant 1} E_k$ es invariante bajo permutaciones de los índices. Por lo tanto lo mismo ha de cumplirse para la serie, es decir que esta debe ser absolutamente convergente si $\left|\nu\left(\bigcup_{k\geqslant 1} E_k\right)\right| < \infty$.

Si μ_1 y μ_2 son medidas positivas tales que por lo menos una es finita, entonces $\nu = \mu_1 - \mu_2$ es una medida signada. Para una medida μ y cualquier $f \colon X \to \mathbb{R}$, tal que por lo menos una de las integrales $\int_X f^+ d\mu$ o $\int_X f^- d\mu$ es finita, se tiene que $\nu = \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$ es una medida signada.

Es útil pensar a las medidas signadas como generalizaciones de las funciones medibles, con la salvedad que estas ya no están definidas puntualmente, si no sobre los conjuntos medibles. El resultado técnico y central en esta sección es ver que algunas de las construcciones de las funciones se extienden a las medidas signadas. En particular buscamos construir los conjuntos de positividad y negatividad, las partes positivas y negativas, y el valor absoluto.

Dado $E \in \mathcal{M}$, denotamos $\nu|_E \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que

$$\nu|_E(F) := \nu(F \cap E).$$

En la siguiente definición damos la noción de conjuntos positivos, negativos, y nulos.

Definición 4. *Dada una medida signada ν sobre el espacio medible $(X, \mathcal{M})$*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\nu \geqslant 0} &:= \{E \in \mathcal{M} \mid \nu|_E \text{ es una medida}\}, \\
\mathcal{M}_{\nu \leqslant 0} &:= \{E \in \mathcal{M} \mid -\nu|_E \leqslant 0 \text{ es una medida}\}, \\
\mathcal{M}_{\nu = 0} &:= \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0} \cap \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}, \\
\mathcal{M}_{\nu > 0} &:= \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0} \backslash \mathcal{M}_{\nu = 0}, \\
\mathcal{M}_{\nu < 0} &:= \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0} \backslash \mathcal{M}_{\nu = 0}.
\end{aligned}$$

Nótese las siguientes sutilezas: $P \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ no significa exactamente que $\nu(P) \geqslant 0$. Tampoco es necesario que cualquier $E \in \mathcal{M}$ deba pertenecer a por lo menos uno de los conjuntos definidos previamente.

Observamos que si $P \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ entonces cualquier $Q \subseteq P$ medible también pertenece a $\mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$. Además $\mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ es cerrado bajo uniones e intersecciones numerables, sin embargo no es necesariamente un álgebra dado que no es cerrado bajo complementos.

Teorema 2 (Hahn)**.** *Dada una medida signada ν sobre el espacio medible $(X, \mathcal{M})$, existe un único $P_\nu \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ (módulo conjuntos ν-nulos) tal que $N_\nu := X \backslash P_\nu \in \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$.*

Como corolario obtenemos la descomposición de Jordan.

Corolario 1 (Jordan)**.** *Dada una medida signada ν sobre el espacio medible $(X, \mathcal{M})$, existen un único par de medidas positivas $\nu^\pm$ mutuamente singulares tales que $\nu = \nu^+ - \nu^-$.*

Para demostrar el corolario, basta ver que $\nu^+ = \nu|_{P_\nu}$ y $\nu^- = \nu|_{N_\nu}$ son las medidas requeridas.

Definimos, a partir de la descomposición de Jordan, la variaciones positiva y negativa de $\nu = \nu^+ - \nu^-$ como ν^+ y ν^- respectivamente. También definimos la variación total de ν como

$$|\nu| := \nu^+ + \nu^-.$$

Por ejemplo, para $\nu = \mu_f$ tenemos que $\nu^\pm = \mu_{f^\pm}$ y $|\nu| = \mu_{|f|}$.

Notemos las siguientes sutilezas: Dado $E \in \mathcal{M}$, tenemos que para la parte positiva de $\nu(E)$

$$(\nu(E))^+ = \text{máx}\{\nu(E), 0\} = \text{máx}\{\nu^+(E) - \nu^-(E), 0\} \leqslant \nu^+(E).$$

De igual forma $(\nu(E))^- = \text{máx}\{-\nu(E), 0\} \leqslant \nu^-(E)$ y $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E)$. En otras palabras, las variaciones son nociones distintas a las partes positivas, negativas o el valor absoluto de la medida. Sin embargo, estas están relacionadas por un tipo de desigualdad triangular.

La idea de la demostración del teorema de Hahn consiste en construir P_ν como un conjunto positivo que maximice la medida.

Demostración del Teorema de Hahn. Asumamos sin pérdida de generalidad que $\{\nu = \infty\} = \varnothing$ y sea $m := \sup_{P \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}} \nu(P)$. Existe por lo tanto una sucesión $\{P_k\} \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ tal que $\nu(P_k)$ tiende a m. Construimos entonces

$$P_\nu := \bigcup_{k \geqslant 1} P_k \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}.$$

Dado que ν es una medida positiva sobre P_ν se tiene que $\nu(P_\nu) \geqslant \nu(P_k)$ y necesariamente $\nu(P_\nu) = m < \infty$. Queda por ver que $N_\nu := X \backslash P_\nu \in \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$ y la unicidad de estos conjuntos, módulo conjuntos ν-nulos.

Para ver la unicidad, asumamos por un momento que $N_\nu \in \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$ y consideremos $P \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ tal que $N := X \backslash P \in \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$. Notamos que $P \backslash P_\nu \subseteq N_\nu \in \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$ y $P \backslash P_\nu \subseteq P \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$, por lo tanto $P \backslash P_\nu \in \mathcal{M}_{\nu = 0}$. De igual forma vemos que $P_\nu \backslash P$, $N \backslash N_\nu$ y $N_\nu \backslash N$ también deben ser ν-nulos.

Retomemos ahora la demostración de $N_\nu \in \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$. Notemos primero que para cualquier $A \subseteq N_\nu$ medible con $\nu(A) > 0$, se tiene que $A \notin \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$. En caso contrario $P_\nu \cup A \in \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ y $\nu(P_\nu \cup A) = m + \nu(E) > m$, lo cual contradice la construcción de m. Tomando de nuevo $A \subseteq N_\nu$, tenemos que si $A \notin \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$, entonces existe $B \subseteq A$ medible tal que $\nu(B) < 0$ y por lo tanto también ha de existir un subconjunto $B' := A \backslash B \subseteq A$ tal que $\nu(B') > \nu(A)$.

Asumimos por contradicción que $N_\nu \notin \mathcal{M}_{\nu \leqslant 0}$. A partir de esta hipótesis debe existir $A_0 \subseteq N_\nu$ medible tal que $\nu_0 := \nu(A_0) > 0$. Dado que $A_0 \notin \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$

$$m_0 := \sup_{B \subseteq A_0 \text{ med.}} \nu(B) \in (\nu_0, \infty).$$

Construimos de forma recursiva $A_{k+1} \subset A_k$ de la siguiente manera:

$$\nu_{k+1} := \nu(A_{k+1}) \geqslant \frac{\nu_k + m_k}{2}, \qquad m_{k+1} := \sup_{B \subseteq A_{k+1} \text{ med.}} \nu(B).$$

Como los conjuntos están anidados, se tiene que $\{m_k\}$ es decreciente. De forma inductiva se tiene que $\{\nu_k\}$ es estrictamente creciente y $m_k > \nu_k$. El paso inductivo consiste en ver primero que $\nu_{k+1} \geqslant \frac{\nu_k + m_k}{2} > \nu_k$. Como $\nu_{k+1} > \nu_k \geqslant \nu_0 > 0$, entonces $A_{k+1} \notin \mathcal{M}_{\nu \geqslant 0}$ lo cual implica que

$$m_{k+1} = \sup_{B \subseteq A_{k+1} \text{ med.}} \nu(B) > \nu_{k+1}.$$

Veamos ahora que $(m_k - \nu_k)$ tiende a cero. Dado que $\nu_{k+1} \geqslant \frac{\nu_k + m_k}{2}$ tenemos que reacomodando los términos

$$m_{k+1} - \nu_{k+1} \leqslant m_k - \nu_{k+1} \leqslant \frac{m_k - \nu_k}{2}.$$

De forma inductiva tenemos que $m_k - \nu_k \leqslant 2^{-k}(m_0 - \nu_0)$ tiende a cero, por lo menos geométricamente.

Finalmente consideramos $A = \bigcap_{k \geqslant 0} A_k$. Tenemos que para cualquier $k \geqslant 0$

$$\nu(A) = \nu_k - \sum_{j \geqslant k} \nu(A_j \backslash A_{j+1}) = \nu_k + \sum_{j \geqslant k} (\nu_{j+1} - \nu_j) > \nu_k > 0.$$

Existe por lo tanto $B \subseteq A$ medible tal que $\nu(B) - \nu(A) > 0$. Esto es una contradicción dado que para k suficientemente grande, tal que $m_k - \nu_k < \nu(B) - \nu(A)$, tendríamos que

$$\nu(B) \underset{B \subseteq A \subseteq A_k}{\leqslant} m_k < \nu_k + \nu(B) - \nu(A) < \nu(B).$$

$\square$

2. Demostración del teorema de Radon-Nikodym

Al igual que para el teorema de descomposición de Hahn, la demostración del teorema de Radon-Nikodym se sigue construyendo a f como una función medible y no-negativa que maximice $\mu_f(X)$ bajo la restricción $\mu_f \leqslant \nu$.

Demostración. Sea $\{f_k\} \subseteq \mathcal{F}_\nu := \{f\colon X \to [0,\infty] \text{ medible} \mid \mu_f \leqslant \nu\}$ tal que

$$\mu_{f_k}(X) \to m := \sup_{f\in\mathcal{F}_\nu} \mu_f(X) \leqslant \nu(X) < \infty.$$

Dado que $g_k := \max\{f_1,\dots,f_k\} \in \mathcal{F}_\nu$ da una sucesión creciente, tenemos que para $f := \sup_k f_k = \sup_k g_k$ se cumple que $\mu_f(X) = m$, gracias al teorema de convergencia monótona. En particular, $f < \infty$ en μ-casi todo punto. Queda por demostrar que $\nu_s := (\nu - \mu_f) \perp \mu$ y la unicidad.

Para ver la unicidad, asumamos por un momento que $\nu_s \perp \mu$ y consideremos $f'\colon X \to [0,\infty]$ medible tal que $\nu_s' := (\nu - \mu_{f'}) \perp \mu$. Tenemos así que $\mu_{(f-f')} \ll \mu$ y $\mu_{(f-f')} = (\nu_s' - \nu_s) \perp \mu$, por lo que $f = f'$ en μ-casi todo punto. Esto también implica que $\nu_s = \nu - \mu_f = \nu - \mu_{f'} = \nu_s'$.

Retomemos la demostración de $\nu_s \perp \mu$. Veamos que si ν_s y μ no son singulares, entonces debe existir $\varepsilon > 0$ y un conjunto $E \in \mathcal{M}_{\mu>0}$ tal que $\varepsilon\mathbb{1}_E \in \mathcal{F}_{\nu_s}$. De modo que partir de esta función contradecimos la maximalidad de f, dado que $g = (f + \varepsilon\mathbb{1}_E) \in \mathcal{F}_\nu$ y $\mu_g(X) > \mu_f(X)$.

Tomando la descomposición de Hahn para $\nu_k := \nu_s - k^{-1}\mu$, construimos $P_k := P_{\nu_k} \subseteq \mathcal{M}_{\nu_k \geqslant 0}$ tal que $N_k := X\backslash P_k \in \mathcal{M}_{\nu_k \leqslant 0}$. Dado que $0 \leqslant \nu_s(N_k) \leqslant k^{-1}\mu(X) < \infty$, vemos que para $N := \bigcap_{k\geqslant 1} N_k$ se tiene necesariamente $\nu_s(N) = 0$. Como asumimos que ν_s y μ no son singulares, el complemento $P := X\backslash N = \bigcup_{k\geqslant 1} P_k$ debe cumplir que $\mu(P) > 0$. Esto nos dice que necesariamente para algún k se tiene que $\varepsilon = k^{-1}$ y $E = P_k \in \mathcal{M}_{\nu_s - \varepsilon\mu \geqslant 0}$ satisface $\mu(E) > 0$. Equivalentemente, $\varepsilon\mathbb{1}_E \in \mathcal{F}_{\nu_s}$, lo cual concluye la demostración. $\square$

3. Esperanza condicional

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finito (o σ-finito) y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ una sub-σ-álgebra (σ-finita respecto de $\mu|_\mathcal{N}$ en caso de que $\mu(X) = \infty$). Dada una función $f \in L^1(\mathcal{M}, \mu)$ tenemos que $\mu_f|_\mathcal{N} \ll \mu|_\mathcal{N}$ y por lo tanto existe una única función $E_\mathcal{N} f \in L^1(\mathcal{N}, \mu|_\mathcal{N})$ tal que

$$E_\mathcal{N} f := \frac{d\mu_f|_\mathcal{N}}{d\mu|_\mathcal{N}}.$$

En otras palabras, para todo $A \in \mathcal{N}$

$$\int_A E_\mathcal{N} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

Si f es $\mathcal{N}$-medible, entonces $E_\mathcal{N} f = f$, sin embargo, $E_\mathcal{N} f$ puede ser distinto de f en general. Esta construcción es mejor conocida en probabilidad como la **esperanza condicional** y suele denotarse como $\mathbb{E}(f|\mathcal{N})$.

Si $\mathcal{N} = \{X, \varnothing\}$, entonces las únicas funciones $\mathcal{N}$-medibles son constantes y por lo tanto

$$E_\mathcal{N} f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu.$$

Si $\mu(X) = 0$, entonces $E_{\mathcal{N}}f$ puede ser cualquier constante y no tenemos una contradicción dado que estas funciones son trivialmente iguales en μ-casi todo punto.

Por otro lado, si $\mathcal{N}$ es la σ-álgebra generada por una partición $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ de X, tal que $\mu(P) \in (0, \infty)$, entonces

$$E_{\mathcal{N}}f = \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu \right) \mathbb{1}_P.$$

Además de ser lineal, esta transformación satisface que dadas sub-σ-álgebras anidadas $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$, entonces

$$E_{\mathcal{N}_1} \circ E_{\mathcal{N}_2} = E_{\mathcal{N}_1}.$$

3.1. Desintegración. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita, $(Y, \mathcal{N})$ un espacio medible, y $T\colon X \to Y$ una transformación medible. Es decir que, $T^{-1}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$ es una sub-σ-álgebra. Las funciones $T^{-1}(\mathcal{N})$-medibles son de la forma $\varphi \circ T$, para $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ medible. En particular, para $f \in L^1(\mathcal{M}, \mu)$ debe existir $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ tal que

$$E_{T^{-1}(\mathcal{N})}f = \varphi \circ T.$$

Propiedad 1.

$$E_{T^{-1}(\mathcal{N})}f = \frac{dT_{\#}\mu_f}{dT_{\#}\mu} \circ T.$$

Demostración. Es claro que $T_{\#}\mu_f \ll T_{\#}\mu$, y por lo tanto la derivada está bien definida. Debemos ver que para todo $A \in T^{-1}(\mathcal{N})$

$$\int_A f d\mu = \int_A \frac{dT_{\#}\mu_f}{dT_{\#}\mu} \circ T d\mu.$$

Por definición de $T^{-1}(\mathcal{N})$ tenemos que $A = T^{-1}(B)$ con $B \in \mathcal{N}$. Por definición de la medida push-forward y la derivada

$$\int_A \frac{dT_{\#}\mu_f}{dT_{\#}\mu} \circ T d\mu = \int_B \frac{dT_{\#}\mu_f}{dT_{\#}\mu} dT_{\#}\mu = \int_B dT_{\#}\mu_f = \int_A d\mu_f = \int_A f d\mu.$$

□

Dados $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$, espacios de medida finita, sea $(X, \mathcal{M}, \mu) = (X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$, $(Y, \mathcal{N}) = (X_1, \mathcal{M}_1)$ y $T = \pi_1$. Dado $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ sea $f_1 \in L^1(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ tal que

$$f_1(x) := \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2).$$

En este caso podemos verificar de las definiciones que $(\pi_1)_{\#}(\mu_1 \times \mu_2)_f = (\mu_1)_{f_1}$. Por lo tanto $E_{\pi_1^{-1}(\mathcal{M}_1)}f = f_1$. Tenemos así la siguiente formulación del Teorema de Fubini

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} E_{\pi_1^{-1}(\mathcal{M}_1)} f d\mu_1.$$

¿Será posible generalizar este resultado? Como de costumbre podemos enfocarnos en el caso $f = \mathbb{1}_A$ donde $A \in \mathcal{M}$. Definimos la medida condicional como la función $\mathcal{N}$-medible

$$\mu_{\mathcal{N}}(A, \cdot) := E_{T^{-1}(\mathcal{N})} \mathbb{1}_A.$$

En este caso tenemos que para $B \in \mathcal{N}$

$$\mu(A \cap B) = \int_B \mathbb{1}_A d\mu = \int_E \mu(A, x) d\mu(X).$$

Esta formula parece ser análoga a la fórmula de Cavalieri. Sin embargo, no siempre se tiene que $\mu_{\mathcal{N}}(\cdot, x)$ es una medida.

Definición 5. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ una sub-σ-álgebra. Una función $\mu_{\mathcal{N}} \colon \mathcal{M} \times X \to [0, \infty)$ se dice una medida condicional regular sobre $\mathcal{M}$ con respecto a $\mathcal{N}$ si y solo si:*

- *Para todo $x \in X$, $\mu_{\mathcal{N}}(\cdot, x)$ es una medida,*
- *para todo todo $A \in \mathcal{M}$, $\mu_{\mathcal{N}}(A, \cdot) \in L^1(X, \mathcal{N}, \mu|_{\mathcal{N}})$,*
- *para todo $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$*

$$\mu(A \cap B) = \int_B \mu_{\mathcal{N}}(A, x) d\mu.$$

Departamento de Matemáticas, CIMAT, Guanajuato, México