CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Quiz 1

Teoría de la medida

1. Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, y sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ tal que $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$. Demuestra que $f\colon X \to Y$ es medible si y solo si para todo $E \in \mathcal{E}$ se tiene que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

2. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y considera la recta real con su σ-álgebra de Borel. Demuestra que $f\colon X \to \mathbb{R}$ es medible si y solo si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\{f > \lambda\} := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \in \mathcal{M}.$$

3. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y considera la recta real con su σ-álgebra de Borel. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ medible y $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, demuestra que $\phi \circ f$ es una función medible.

4. Sean $(X, \mathcal{M})$, $(Y_1, \mathcal{N}_1)$, y $(Y_2, \mathcal{N}_2)$ espacios medibles. Demuestra que $(f, g) : X \to Y_1 \times Y_2$ es medible si y solo si $f : X \to Y_1$ y $g\colon X \to Y_2$ son funciones medibles.

5. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y considera la recta real con su σ-álgebra de Borel. Dados $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ medibles, demuestra que $f + g$ y fg son funciones medibles.

6. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y considera la recta real con su σ-álgebra de Borel. Dada una sucesión $\{f_k\}$ de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$, demuestra que $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$, y $\liminf_{k\to\infty} f_k$ son funciones medibles.

7. Sea ρ una pre-medida sobre un álgebra $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de conjuntos elementales. Consideramos μ_* como la medida exterior generada a partir de ρ. Demuestra que para todo $E \in \mathcal{E}$ se tiene que $\mu_*(E) = \rho(E)$.

8. Sea ρ una pre-medida sobre un álgebra $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de conjuntos elementales. Consideramos μ_* como la medida exterior generada a partir de ρ, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu_*)$ la σ-álgebra generada a partir de μ_* y μ la medida que se obtiene al restringir μ_* a $\mathcal{M}$. Dada una medida arbitraria $\nu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$, demuestra que si $\nu = \rho$ en $\mathcal{E}$, entonces $\nu(A) \leq \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$. Más aún, la igualdad se satisface si $\mu(A) < \infty$.

9. Sea ρ una pre-medida sobre un álgebra $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de conjuntos elementales. Si ρ es σ-finita, es decir que existe $\{E_i\} \subseteq \mathcal{E}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y $\rho(E_i) < \infty$, entonces existe una única medida $\mu\colon \sigma(\mathcal{E}) \to [0, \infty]$ tal que $\mu = \rho$ en $\mathcal{E}$.

CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Quiz 2

Teoría de la medida

1. Determina el siguiente límite y justifica el cálculo
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx$$

2. Demuestra que $\|\cdot\|_\infty$ es una semi-norma tal que $\|f\|_{L^\infty}=0$ si y solo si $f=0$ en casi todo punto.

3. Demuestra que $f_k\to f$ en L^∞ si solo si para todo $\varepsilon>0$
$$\mu(\{|f_k-f|>\varepsilon\})=0 \text{ eventualmente.}$$

4. Dada una sucesión $\kappa\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, sea
$$\Sigma=\bigcup_{m\geq 1}\bigcup_{k\geq\kappa(m)}\{|f_k-f|>1/m\}.$$
Demuestra que $\{f_k\}$ converge uniformemente a f en $X\setminus\Sigma$.

5. Sea V un espacio vectorial sobre los reales, y sea $n\colon V\mapsto[0,\infty)$ con las siguientes propiedades:
   - Homogénea: Para todo $c\geq 0$, $n(c\mathbf{v})=cn(\mathbf{v})$,
   - $\{n\leq 1\}$ es convexo.

   Demuestra que n es convexa.

6. Dado un espacio de medida $(X,\mathcal{M},\mu)$ y $p>0$ definimos
$$L^p(X,\mathcal{M},\mu)=\left\{f\colon X\to\mathbb{R}\text{ med.}\;\middle|\;\int|f|^p d\mu<\infty\right\},\qquad \|f\|_p=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$
Decimos además que $f_k\to f$ en L^p si y solo si $\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$.
   (a) Demuestra que $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ es un espacio vectorial.
   (b) Demuestra que para $p\geq 1$, $\|\cdot\|_p$ es una semi-norma sobre $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ tal que $\|f\|_p=0$ si y solo si $f=0$ en casi todo punto.

7. Demuestra que si $f_k\to f$ en casi todo punto y $\sup_k|f_k|\in L^p$, entonces $f_k\to f$ en L^p.

8. Dado $\mu(X)<\infty$, demuestra que si $f_k\to f$ en L^∞, entonces $f_k\to f$ en L^p.

9. Demuestra que si $f_k\to f$ en L^p, entonces $f_k\to f$ en medida.

CIMAT

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Quiz 3

Teoría de la medida

1. Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}$ una partición finita. Demuestra que existe una enumeración $\mathcal{P} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ tal que $I_1 \prec \ldots \prec I_n$. ¿Es esto posible para $\mathcal{P}$ numerable?

2. Demuestra que para todo $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, existe una única partición de U por intervalos abiertos.

3. (Besicovich) Sea S un conjunto finito de intervalos abiertos. Demuestra que existe $S' \subseteq S$ tal que

   1. $\bigcup_{I\in S} I = \bigcup_{I\in S'} I$
   2. Todo $x \in \mathbb{R}$ está contenido en a lo sumo dos intervalos de S'.

   Pista: Primero refina el conjunto de intervalos de manera que ningún intervalo esté contenido en la unión de los otros intervalos.

4. Demuestra que los Borelianos de $\mathbb{R}^d$ son Lebesgue medibles.

5. Demuestra que para todo $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, existe una partición $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ de U.

   Pista: Los elementos de $\mathcal{P}$ pueden ser tomados como cubos (diádicos) de la forma $Q = 2^{-k}\mathbf{j} + (0, 2^{-k}]^d$, donde $k \geq 0$ y $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$.

6. Demuestra que para todo $E \subseteq \mathbb{R}^d$ (no necesariamente medible),

$$\mu_*(E) = \inf\{m(U) \mid E \subseteq U \text{ abierto}\}.$$

7. Demuestra que para todo $E \in \mathcal{L}$ con $m(E) < \infty$ y $\varepsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $m(E\Delta F) < \varepsilon$.

8. Demuestra que si $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ (no necesariamente medibles) son tales que

$$\operatorname{dist}(E, F) := \inf\{|x - y| \mid x \in E, y \in F\} > 0,$$

   entonces $\mu_*(E \cup F) = \mu_*(E) + \mu_*(F)$.

9. $\star$ Demuestra que $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es Lebesgue medible si y solo si cumple el siguiente criterio: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto U que contiene a E tal que $\mu_*(U \setminus E) < \varepsilon$.

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Quiz 4

Teoría de la medida

1. Sean $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$ espacios de medida para $k \in \{1, 2, 3\}$
   (a) Demuestra que
   $$(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \times \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_1 \times (\mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3).$$
   (b) Asumiendo que los espacios son σ-finitos, demuestra que
   $$(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3).$$
   (c) Demuestra que para la medida de Lebesgue
   $$\text{Borel}(\mathbb{R}^{d_1+d_2}) = \text{Borel}(\mathbb{R}^{d_1}) \times \text{Borel}(\mathbb{R}^{d_2}),$$
   y además
   $$m_{d_1+d_2} = m_{d_1} \times m_{d_2}.$$
2. Sea $E \notin \text{Borel}(\mathbb{R})$ y $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \in E\}$. Demuestra que $F \notin \text{Borel}(\mathbb{R}^2)$, sin embargo todas sus rebanadas horizontales y verticales sí son conjuntos Borelianos.
3. Dado $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ y $\mu = \#$, considera $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ tal que
   $$f(m, n) = \mathbb{1}_{\{m=n\}} - \mathbb{1}_{\{m=n+1\}}.$$
   ¿Se aplica el Teorema de Fubini en este caso? ¿Se llegaría a una contradicción?
4. Dado $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \text{Borel}([0, 1])$, $\mu = m$, $\nu = \#$, considera $D = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = y\}$:
   (a) Demuestra que $D \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$.
   (b) ¿Se aplica el Teorema de Cavalieri en este caso? ¿Se llegaría a una contradicción?
   (c) ¿En cuál paso de la demostración del Teorema de Cavalieri usamos (de forma implícita) que las medidas son finitas?
   (d) Da los detalles para ver que el Teorema de Cavalieri es válido en espacios σ-finitos a partir del resultado en espacios de medida finita.

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Quiz 5

Teoría de la medida

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva.

La variación total de una medida signada $\nu\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ está dada por $\|\nu\| := |\nu|(X)$.

Un conjunto S de medidas signadas sobre $(X, \mathcal{M})$ es absolutamente equicontinuo con respecto a μ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$, entonces $\sup_{\nu \in S} |\nu|(E) < \varepsilon$.

Un conjunto $F \subseteq L^1$ es uniformemente integrable si y solo si es acotado en L^1 y $\{\mu_f \mid f \in F\}$ es absolutamente equicontinuo con respecto a μ.

1. Demuestra que el conjunto de medidas con variación total finita forman un espacio vectorial para el cual la variación total es una norma. Más aún, para toda $f \in L^1$ se tiene que $\|\mu_f\| = \|f\|_1$.
2. Demuestra que si $F \subseteq L^1$ y $g \in L^1$ satisface que $\sup_{f \in F} |f| \leq g$, entonces F es uniformemente integrable. Sin embargo, esta condición no es necesaria.
3. Demuestra que si $\{f_k\} \subseteq L^1$ es una sucesión que tiende a f en L^1, entonces es uniformemente integrable.
4. Sea $F \subseteq L^1$ tal que $\sup_{f \in F} \|f\|_1 < \infty$. Demuestra que $\{\mu_f \mid f \in F\}$ es absolutamente equicontinuo con respecto a μ, si y solo si
$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{f \in F} \int_{\{|f| > \lambda\}} |f| d\mu = 0.$$
Adicionalmente, si $\mu(X) < \infty$, entonces la identidad de arriba implica que F es acotado en L^1 y por lo tanto uniformemente integrable.
5. Demuestra que la condición en el ejercicio anterior puede ser reemplazada por
$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{f \in F} \int_X (|f| - \lambda)_+ d\mu = 0.$$
6. Sea $\mu(X) < \infty$. Demuestra que si $\{f_k\}$ es uniformemente integrable, entonces $f_k \to f$ en medida si y solo si $f_k \to f$ en L^1.

7. En el ejercicio anterior, si $\mu(X) = \infty$ podemos asumir en cambio que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{f\in F} \int_{\{|f|<\varepsilon\}} |f| d\mu = 0$$

para concluir el mismo resultado.

8. Sea $\mu(X) < \infty$ y $p > 1$. Demuestra que si $\mathcal{F} \subseteq L^p$ satisface $\sup_{f\in F} \|f\|_p < \infty$, entonces F es uniformemente integrable.

9. Sea $\mu(X) < \infty$. Buscamos demostrar que si $\mathcal{F} \subseteq L^1$ es uniformemente integrable, entonces existe una función $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ superlineal, es decir que $\lim_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda)/\lambda = \infty$, para la cual $\sup_{f\in F} \int_X \varphi(|f|) d\mu < \infty$:

   (a) Sea $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ un difeomorfismo creciente de clase C^1. Demuestra que
   $$\int_X \varphi(|f|) d\mu = \int_0^\infty \varphi'(\lambda) \mu(|f| > \lambda) d\lambda.$$

   (b) Dadas las sucesiones numéricas no-negativas $\{\lambda_k\}$ y $\{m_k\}$, tal que $\{\lambda_k\}$ es creciente, sea
   $$\varphi(\lambda) := \int_0^\lambda \sum_{k=1}^\infty m_k \mathbb{1}_{[\lambda_k,\infty)} dt.$$

   Demuestra que

   $$\int_X \varphi(|f|) d\mu = \sum_{k=1}^\infty m_k \int_X (|f| - \lambda_k)_+ d\mu.$$

   (c) Concluye la demostración tomando sucesiones convenientes.