CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Problemario

Teoría de la medida

Notación

$\alpha^{\pm}$	Partes positivas y negativas
$\mathbb{1}_E$	Función indicadora o característica de E
$B_r(x)$	Bola abierta con centro en x y radio r
$Q_\ell(x)$	Cubo abierto en $\mathbb{R}^d$ con lados paralelos a los ejes de coordenadas, centro en x, y longitud ℓ
$\operatorname{dist}_F(x) := \operatorname{ínf}_{y\in F} \lvert x-y\rvert$	Función distancia al conjunto F
$\operatorname{osc}_E f := \sup_{x,y\in E} \lvert f(y)-f(x)\rvert$	Oscilación de f sobre E
$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$	Función gamma
$\sigma(\mathcal{E})$	σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$
$\operatorname{Borel}(\mathbb{R}^d)$	σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^d$
$\operatorname{Leb}(\mathbb{R}^d)$	σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$
m, m^d	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^d$
m^*	Medida exterior de Lebesgue
$\#$	Medida de contar
δ_x	Delta de Dirac centrada en x
L^+	Conjunto de funciones medibles y no negativas
L^p, $\lVert\cdot\rVert_p$	Espacios de Lebesgue y su respectiva norma
$\nu \ll \mu$	ν es absolutamente continua con respecto a μ
$\nu \perp \mu$	ν y μ son mutuamente singulares
$\nu^{\pm}$ y $\lvert\nu\rvert$	variación positiva/negativa y total de ν
$\lVert\cdot\rVert_{TV}$	Norma de variación total
$d\nu/d\mu$	Derivada de Radon-Nikodym
μ_f	Medida dada por $d\mu_f = f d\mu$

1. Cálculo y desigualdades

1. Calcula los siguientes límites:
   (a) $\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty (1+(x/k))^{-k}\sin(x/k)dx$.
   (b) $\lim_{k\to\infty}\int_0^1 (1+kx^2)(1+x^2)^{-k}dx$.
   (c) $\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty k\sin(x/k)(x(1+x^2))^{-1}dx$.
   (d) $\lim_{k\to\infty}\int_a^1 k(1+k^2x^2)^{-1}dx$.
   (e) $\lim_{k\to\infty}\int_0^k x^k(1-x/k)^k dx$.
2. Sea $E=[0,1]^2$. Determina la existencia e igualdad de las integrales $\iint_E f dm^2$, $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$ y $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx$ en los siguientes casos:
   (a) $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$.
   (b) $f(x,y)=(1-xy)^\alpha$ para $\alpha>0$.
   (c) $f(x,y)=(x-0.5)^{-3}\mathbb{1}_{\{0<y<|x-0.5|\}}(x,y)$.
3. (Gauss) Demuestra que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$
4. Demuestra que
$$m(B_1)=\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$$
5. Justifica las siguientes fórmulas:
   (a) Para $a>0$, $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(ax)dx=\sqrt{\pi}e^{-a^2/4}$.
   (b) Para $a>-1$, $\int_0^1 x^a(1-x)^{-1}dx=\sum_{k=1}^\infty (a+k)^{-2}$.
   (c) Para $a>1$, $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax}x^{-1}\sin x dx=\arctan(1/a)$.
6. Demuestra que para $x,y>0$
$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$
7. Sea $B_1\subseteq\mathbb{R}^d$ la bola unitaria. Dados $k_1,\dots,k_d$ enteros positivos y $\alpha_1=k_1+1/2,\dots,\alpha_d=k_d+1/2$, demuestra que
$$\int_{B_1} x_1^{2k_1}\dots x_d^{2k_d}dx=\frac{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_d)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_d+1)}$$
8. Demuestra que
$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-xy}=\frac{\pi^2}{6}.$$

9. Demuestra que[1]

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

10. Dado n entero positivo, demuestra que

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin^2(n(x+y))}{\sin^2(nx)-\sin^2(ny)}dxdy = 2\pi\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

11. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexa y homogénea ($\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ para todo $\lambda \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$):
    (a) Demuestra que $\varphi(x) = \sup\{p\cdot x \mid p \in \partial\varphi(0)\}$ donde

    $$\partial\varphi(0) := \{p \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(x) \geq p\cdot x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d\}.$$

    (b) Demuestra que para $f_1,\dots,f_d \in L^+$

    $$\varphi\left(\int f_1,\dots,\int f_d\right) \leq \int \varphi(f_1,\dots,f_d)$$

12. (Hanner) Demuestra que si $p \geq 2$, entonces para $f,g \in L^p$

    $$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p,$$

    mientras que si $p \in [1,2]$ la desigualdad cambia de dirección[2].

13. (Clarkson) Demuestra que si $p \geq 2$, entonces para $f,g \in L^p$

    $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

    Mientras que si $p \in (1,2]$ y $1/p + 1/q = 1$

    $$\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q\right)^{p/q} \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

14. (Hölder) Demuestra que para $1 \leq p_1,\dots,p_k \leq \infty$ tal que $1/r := 1/p_1 + \dots + 1/p_k \leq 1$

    $$\|f_1\dots f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1}\dots\|f_k\|_{p_k}.$$

15. Demuestra que para $\mu(X) \in (0,\infty)$ y $1 \leq p_0 \leq p_1$ se tiene que[3]

    $$\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |f|^{p_0}d\mu\right)^{1/p_0} \leq \left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |f|^{p_1}d\mu\right)^{1/p_1}.$$

16. (Interpolación) Demuestra que para $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $\theta \in [0,1]$ y $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$[4]

    $$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta}\|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

---

[1] *Pista:* $x^{-1} = \int_0^\infty e^{-xt}dt$.
[2] *Pista:* Analiza la convexidad de la función $(a,b) \in \mathbb{R}^2_{>0} \mapsto (a^{1/p} + b^{1/p})^p + |a^{1/p} - b^{1/p}|^p$.
[3] *Pista:* $|f|^{p_0} = |f|^{p_0}1$.
[4] *Pista:* $|f|^p = |f|^{(1-\theta)p}|f|^{\theta p}$

17. (Interpolación) Demuestra que para $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq \infty$

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0} + \|f\|_{p_1}.$$

18. (Young) Demuestra que para $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^\mathrm{d}), m)$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tal que $1/p + 1/q + 1/r = 2$[5]

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)h(x)dydx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

19. (Young) Demuestra que para $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^\mathrm{d}), m)$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$[6]

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

20. Demuestra que para $f \in C^1_c(\mathbb{R})$

$$\operatorname*{osc}_{(a,b)} f \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

21. (Hardy) Demuestra que para $d \geq 3$ y $f \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{(d-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

22. (Sobolev) Demuestra que para $f \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$[7]

$$\|f\|_2 \leq \|\nabla f\|_1$$

23. (Sobolev) Demuestra que para $d > 1$, $1^* = d/(d-1)$ y $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_{1^*} \leq \|\nabla f\|_1$$

24. (Sobolev) Demuestra que para $1 \leq p < d$, $p^* = pd/(d-p)$ y $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|\nabla f\|_p$$

para alguna constante $C > 0$ dependiendo de p y la dimensión.

25. (Morrey) Demuestra que para $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{1}{m(B_1)} \int_{B_1} |f(x) - f(0)| dx \leq C \int_{B_1} \frac{|\nabla f(x)|}{|x|^{d-1}} dx,$$

donde $C = 1/\sigma(\partial B_1) = \Gamma(d/2)/(2\pi^{d/2})$.

---

[5] *Pista:* $|fgh| = (|f|^p|g|^q)^{1-1/r}(|g|^q|h|^r)^{1-1/p}(|h|^r|f|^p)^{1-1/q}$.

[6] *Pista:* $|fg| = (|f|^{p/r}|g|^{q/r})|f|^{1-p/r}|g|^{1-q/r}$.

[7] *Pista:* $|u(x_1,x_2)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1,y)|dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(y,x_2)|dy\right)$.

2. Modos de convergencia

26. Sea $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $x_k \to 0$:
    (a) Demuestra que $B_1 \subseteq \limsup_{k\to\infty} B_1(x_k) \subseteq \overline{B_1}$.
    (b) Da ejemplos de sucesiones para los cuales $\limsup_{k\to\infty} B_1(x_k)$ sea tan grande y tan pequeño como sea posible.

27. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $\{f_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$:
    (a) Demuestra que
    $$\limsup_{k\to\infty}\{|f_k| > \varepsilon\} = \left\{\limsup_{k\to\infty} |f_k| > \varepsilon\right\}.$$
    (b) Demuestra que $f_k \to 0$ en casi todo punto si y solo si para todo $\varepsilon > 0$
    $$\mu\left(\limsup_{k\to\infty}\{|f_k| > \varepsilon\}\right) = \mu\left(\left\{\limsup_{k\to\infty} |f_k| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$
    (c) ¿Será cierto que $f_k \to 0$ en casi todo punto si y solo si para todo $\varepsilon > 0$
    $$\limsup_{k\to\infty} \mu(\{|f_k| > \varepsilon\}) = 0?$$

28. Sea $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq L^+$ tal que $f_k \to f$ en casi todo punto y $\lim \int f_k = \int f$:
    (a) Demuestra que si $\int f < \infty$, entonces $\int_E f = \lim \int_E f_k$ para todo $E \in \mathcal{M}$.
    (b) Demuestra que si $\int f = \infty$, entonces no necesariamente se cumple que $\int_E f = \lim \int_E f_k$ para todo $E \in \mathcal{M}$

29. (Brezis-Lieb) Sea $p \in (0, \infty)$ y $f_k, f \in L^p$ tal que $f_k \to f$ en casi todo punto. Demuestra que $f_k \to f$ en L^p si y solo si $\|f_k\|_p \to \|f\|_p$.[8]

30. (Brezis-Lieb) Sean $p \in (0, \infty)$, $f_k, f \in L^p$ tal que $f_k \to f$ en casi todo punto:
    (a) Demuestra que si $p \in (0, 1]$
    $$\int |f|^p = \lim_{k\to\infty}\left(\int |f_k|^p - \|f_k - f\|_p^p\right).$$
    (b) Demuestra que si $p > 1$ y $\sup_k \|f_k\|_p < \infty$
    $$\int |f|^p = \lim_{k\to\infty}\left(\int |f_k|^p - \|f_k - f\|_p^p\right).$$

31. Dado $p > 1$, sea $\{f_k\}_{k\geq 1} \in L^p$ tal que $\|f_k\|_p \leq 1$
    (a) Demuestra que $f_k/k \to 0$ en casi todo punto.
    (b) Demuestra que esta propiedad no necesariamente se cumple para $p = 1$.

[8] *Pista*: El teorema de convergencia dominada tiene la siguiente generalización: Dada una sucesión f_k tal que $|f_k| \leq g_k$ y $\int \lim g_k = \lim \int g_k$, se tiene que $\int \lim f_k = \lim \int f_k$.

32. Asume que $f_k \to f$ y $g_k \to g$ en medida.
   (a) Demuestra que si $\mu(X) < \infty$, entonces $f_k g_k \to fg$ en medida.
   (b) Demuestra que si $\mu(X) = \infty$, entonces no necesariamente se cumple que $f_k g_k \to fg$ en medida.

33. Demuestra que si $f \in L^{p_0}$ para algún $p_0 > 0$ y $\mu(\{|f| > 0\}) < \infty$, entonces $\lim_{p\to 0} \|f\|_p^p = \mu(\{|f| > 0\})$.

34. Demuestra que si $f \in L^{p_0} \cap L^\infty$ para algún $p_0 > 0$, entonces $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

35. (Riemann) Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demuestra que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = 0.$$

36. Dado $E \subseteq [0, 2\pi]$ medible y una sucesión numérica $\{u_k\}_{k\geq 1}$, demuestra que

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \cos^2(kx + u_k) dx = \frac{1}{2} m(E).$$

37. Dado $p \in [1, \infty)$, Demuestra que $f_k = k^{1/p} \mathbb{1}_{(0,1/k)}$ converge débilmente a cero si y solo si $p > 1$.

38. Sea $\{f_k\} \subseteq L^p$ una sucesión acotada en L^p tal que $f_k \to f$ en casi todo punto:
   (a) Demuestra que si $p \in (1, \infty)$, entonces $f_k \rightharpoonup f$.
   (b) Demuestra que si $\mu(X) < \infty$ y $p = \infty$, entonces $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
   (c) Da un contraejemeplo para este resultado con $p = 1$.

39. Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $1/p + 1/q = 1$. Sean $\{f_k\} \subseteq L^p$ y $\{g_k\} \subseteq L^q$ tales que $f_k \to f$ en L^p y $g_k \rightharpoonup g$ débilmente en L^q. Demuestra que

$$\int_X f_k g_k d\mu \to \int_X fg d\mu.$$

40. (Brezis-Lieb) Sea $p \in (1, \infty)$ y $f_k, f \in L^p$ tal que $f_k \rightharpoonup f$. Demuestra que $f_k \to f$ en L^p si y solo si $\|f_k\|_p \to \|f\|_p$.[9]

3. Medida e integral de Lebesgue

41. Demuestra que para $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto

$$m(K) = \inf_{r>0} m\left(\bigcup_{x\in K} B_r(x)\right).$$

Sin embargo, el resultado deja de ser cierto si K es cerrado pero no acotado, o bien si K es acotado pero no es cerrado.

[9] *Pista:* Usa las desigualdades de Clarkson.

42. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ cerrados. Demuestra que $A + B \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R})$, sin embargo puede suceder que este conjunto no sea cerrado.

43. Dado $E \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ con $m(E) = 0$, demuestra que $m(\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in E\}) = 0$.

44. Dado $d_1 < d_2$ y $T \colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ Lipschitz continua, demuestra que $m^{d_2}(T(\mathbb{R}^{d_1})) = 0$.

45. (Steinhaus) Dados $A, B \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ con medidas positivas, demuestra que el conjunto $A + B$ contiene una bola abierta.

46. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto finito de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Demuestra que existe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ tal que $\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ y $\sum_{J \in \mathcal{J}} \mathbb{1}_J \leq 2$.

47. Dado $E \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^d)$, demuestra que existe $\tilde{E} \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^d)$ tal que $m(E \Delta \tilde{E}) = 0$ y

$$\partial \tilde{E} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < m(\tilde{E} \cap B_r(x)) < m(B_r(x)) \text{ para todo } r > 0\}.$$

4. Medida producto y teorema de Fubini

48. Dada $f, g \in L^+$ demuestra que

$$\int_X f g d\mu = \int_0^\infty \left(\int_{\{f > \lambda\}} g d\mu \right) d\lambda.$$

49. Dada $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible demuestra que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ es un conjunto nulo del plano.

50. Asume que $f \in L^1([0, 1])$ y $g(x) = \int_x^1 f(t) t^{-1} dt$. Demuestra que $g \in L^1([0, 1])$ y $\int_0^1 g dx = \int_0^1 f dx$.

51. Dado $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $m(\mathbb{R} \setminus F) < \infty$, demuestra que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{dist}_F(y)}{|y - x|^2} dy < \infty \text{ para casi todo } x \in F.$$

52. Dadas dos medidas signadas μ, ν sobre $\mathrm{Borel}(\mathbb{R}^d)$ definimos su convolución como

$$(\mu * \nu)(E) := (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \mid x + y \in E\}).$$

   (a) Demuestra que la convolución es distributiva, conmutativa y asociativa.

   (b) Demuestra que $\|\mu * \nu\|_{TV} \leq \|\mu\|_{TV} \|\nu\|_{TV}$.

5. Diferenciación

53. Dado $K \in L^+(\mathbb{R}^d)$ tal que $\int K = 1$, sea $K_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} K(x/\varepsilon)$. Demuestra que para $f \in L^1$ se tiene que $K_\varepsilon * f \to f$ en L^1 cuando $\varepsilon \to 0^+$.

54. (Steinhaus) Dado $E \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ con $m(E) > 0$, demuestra que el conjunto $E - E := \{x - y \mid x, y \in E\}$ contiene un intervalo abierto alrededor del cero.

55. Sean $\mu_1, \dots, \mu_n$ medidas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{M})$ y sea $f_i = d\mu_i / d(\sum_{k=1}^n \mu_k)$.
    (a) Demuestra que para todo i, $0 \leq f_i \leq 1$ en μ_i-casi todo punto.
    (b) Demuestra que para todo i, j distintos, $0 \leq f_i < 1$ en μ_j-casi todo punto.

56. Sea $A \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ con $m(A) > 0$. Demuestra que existe una sucesión numérica $\{x_k\}$ tal que $m\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\geq 1}(A + x_k)\right) = 0$.

57. Sea $A \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ y $T \subseteq \mathbb{R}$ denso tal que $m((A+t) \setminus A) = 0$ para todo $t \in T$. Demuestra que uno de los dos conjuntos A ó $\mathbb{R} \setminus A$ tiene medida cero.

58. Dado $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado, demuestra que para casi todo $x \in F$

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{\mathrm{dist}_F(x+y)}{|y|} = 0.$$

59. Para $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible, decimos que es aproximadamente continua en $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(\{x \in B_r(x_0) \mid |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon\})}{m(B_r(x_0))} = 0.$$

    Demuestra que toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es aproximadamente continua en casi todo punto.

60. Demuestra que para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene que $K_\varepsilon * f \to f$ en casi todo punto en los siguientes casos:
    (a) $K_\varepsilon(x) := Ce^{-|x|^2/\varepsilon}$ para $C := (\pi\varepsilon)^{-d/2}$.
    (b) $K_\varepsilon(x) := C\varepsilon(\varepsilon^2 + |x|^2)^{-(d+1)/2}$ para $C := \Gamma((d+1)/2)\pi^{-(d+1)/2}$.

61. Sea $\theta \in (0,1)$ y $A \subseteq B \subseteq [0,1]^d$ medibles tales que $m(A) \leq \theta$, y para todo cubo $Q_\ell(x) \subseteq [0,1]^d$ se tiene que si $Q_\ell(x) \setminus B \neq \emptyset$, entonces $m(A \cap Q_{\ell/3}(x))/m(Q_{\ell/3}) \leq \theta$. Demuestra que $m(A) \leq \theta m(B)$.

6. Ejemplos particulares

62. Da un conjunto $U \subseteq [0,1]$ abierto para el cual $m(\partial U) > 0$.

63. Da un conjunto $E \in \mathrm{Borel}([0,1])$ para el cual $m(E) > \sup\{m(U) \mid U \subseteq E$ abierto$\}$.

64. Da dos conjuntos $E, F \subseteq \mathbb{R}$ acotados para los cuales $m^*(E \cup F) < m^*(E) + m^*(F)$.

65. Da una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

66. Da un ejemplo de una sucesión de funciones medibles de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ que converja a cero en los modos dados:
    (a) En L^1 y en casi todo punto pero no en L^∞.
    (b) En L^1 y en medida pero no en casi todo punto.
    (c) En casi todo punto pero no en L^1.
    (d) En medida pero no en casi todo punto ni en L^1.

67. Da un ejemplo de una sucesión de funciones medibles de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que converja a cero en los modos dados:
    (a) En L^∞ pero no en L^1.
    (b) En casi todo punto pero no en medida.

68. Dada una enumeración $\{q_k\}_{k\geq 1}$ de los racionales, sea

$$f(x) := \sum_{k\geq 1} 2^{-k} x^{-1/2} \mathbb{1}_{[q_k, q_k+1]}(x).$$

Demuestra que la serie converge para casi todo punto, sin embargo f no es acotado en cualquier intervalo.

69. Da dos conjuntos $A, B \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R})$ tales que $m(A) = m(B) = 0$, pero $m(A+B) > 0$.

70. Da una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua exactamente en los racionales.

71. Da una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua, estrictamente creciente, pero $f' = 0$ en casi todo punto.

72. Da una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea uniformemente continua pero no absolutamente continua.

73. Da un conjunto $E \in \mathrm{Borel}([0,1])$ tal que para cualquier intervalo $I \subseteq [0,1]$[10]

$$0 < m(E \cap I) < m(I).$$

74. Da un función medible $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier $g = f$ en casi todo punto se tiene que g es discontinua en todas partes.

75. El conjunto de Vitali se obtiene tomando un representante en $[0,1]$ de cada una de las clases de equivalencia dada por $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Demuestra que cualquier sub-conjunto medible del conjunto de Vitali tiene medida cero.

76. Demuestra que cualquier $E \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ con $m(E) > 0$ contiene un conjunto no medible.

77. Demuestra que $\mathrm{Leb}(\mathbb{R}^2) \setminus \mathrm{Leb}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Leb}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

78. Demuestra que $\mathrm{Leb}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Borel}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

79. Dados $0 < a < b$, sea $f_k(x) = ae^{-kax} - be^{-kbx}$:
    (a) Demuestra que $\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty |f_k| = \infty$.
    (b) Demuestra que $\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty f_k = 0$.
    (c) Demuestra que $\sum_{k=1}^\infty f_k \in L^1([0,\infty))$, y $\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty f_k = \ln(b/a)$.

80. Da una medida $\mu \neq \#$ tal que $\mu = \#$ sobre el álgebra generada por los intervalos semi-abiertos en $\mathbb{R}$.

[10] *Pista:* Usa el conjunto de Cantor.