CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Parcial 1.0

Teoría de la medida

1. Esboza los pasos para la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ usando el proceso de extensión de Carathéodory.

2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Dado $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ considera los cinco tipos de convergencia:

   1. En casi todo punto,
   2. uniformemente en casi todo punto o L^∞,
   3. en $L^{p_1}(X, \mathcal{M}, \mu)$,
   4. en $L^{p_2}(X, \mathcal{M}, \mu)$,
   5. en medida.

   (a) ¿Cuál o cuáles son los tipos más fuertes, y cuál o cuales los más débiles?

   (b) Si asumimos en cambio $\mu(X) = \infty$, cuáles implicaciones entre estos tipos de convergencia dejan de ser válidos.

3. Dado $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}^d$ sea $f_h(x) = f(x - h)$.

   (a) Demuestra que si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_h \to f$ uniformemente.

   (b) Sea $p \in [1, \infty)$. Demuestra que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_h \to f$ en L^p.

   (c) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces $f * g$ es uniformemente continua.

   (d) Demuestra que para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^d)$ con $m(A)m(B) > 0$, existe $B_\varepsilon(x_0) \subseteq A + B$ para algún $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

4. Sea $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Demuestra que

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \int_{-x}^\infty \exp(x \ln(1 + t/x) - t) dt$$

(b) Demuestra que para todo $\varepsilon \in (-1, \infty)$, existe alguna constante $C > 0$ tal que si $t = \varepsilon x$

$$\left| x \ln\left(1 + t/x\right) - t - t^2/(2x) \right| \leq C|t|^3/x^2.$$

(c) (Stirling) Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1/2} e^{-x}} = \sqrt{2\pi}$$

Parcial 1

Teoría de la medida

1. Esboza los pasos para la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ usando el proceso de extensión de Carathéodory.

Solución: El teorema de extensión de Carathéodory dice que dada una pre-medida σ-finita ρ sobre un álgebra $\mathcal{E}$, existe una única medida μ que extiende a ρ sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$.

En el caso de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ usaremos $\mathcal{I}$ el conjunto de intervalos de $\mathbb{R}$, $\ell\colon \mathcal{I} \to [0, \infty]$ la longitud

$$\ell(I) = \begin{cases} \sup I - \inf I \text{ si } I \neq \emptyset, \\ 0 \text{ si } I = \emptyset. \end{cases}$$

Finalmente $\mathcal{E} = \{E = I_1 \cup \ldots \cup I_n \mid \text{ intervalos disjuntos}\}$ son los conjuntos elementales.

Paso 1: $\mathcal{E}$ es un álgebra. Observamos que $\mathcal{I}$ es cerrado bajo intersecciones y sus complementos son elementales. Demostramos de forma inductiva que $\mathcal{E}$ es cerrado bajo uniones finitas y usando las leyes de Morgan vemos que también es cerrado bajo complementos.

Paso 2: Podemos extender ℓ a $\mathcal{E}$ usando

$$\ell(E) = \ell(I_1) + \ldots + \ell(I_n)$$

si $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos disjuntos cuya unión es E. Esta propiedad se cumple si E es un intervalo gracias a que podemos ordenar los intervalos $I_1, \ldots, I_n$ y usar la propiedad telescópica de la suma. Para cualesquiera dos particiones finitas de un elemental E usando intervalos encontramos un refinamiento común, también finito y usando intervalos, y vemos que la suma de las longitudes en los intervalos en el refinamiento debe ser igual a la suma de las longitudes en las particiones originales.

Paso 3: ℓ es una pre-medida. La aditividad finita se sigue de la definición. Queda demostrar que si $\{E_k\} \subseteq \mathcal{E}$ es una sucesión disjunta tal que $\bigcup_{k\geq 1} E_k = E \in \mathcal{E}$, entonces $\ell(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(E_k)$. La desigualdad $\ell(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(E_k)$ se sigue de la aditividad finita, mientras que la otra dirección se sigue por compacidad si asumimos que E es compacto. El caso donde E no es compacto se sigue por aproximación usando la definición de ℓ.

2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Dado $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ considera los cinco tipos de convergencia:

   1. En casi todo punto,
   2. uniformemente en casi todo punto o L^∞,
   3. en $L^{p_1}(X, \mathcal{M}, \mu)$,
   4. en $L^{p_2}(X, \mathcal{M}, \mu)$,
   5. en medida.

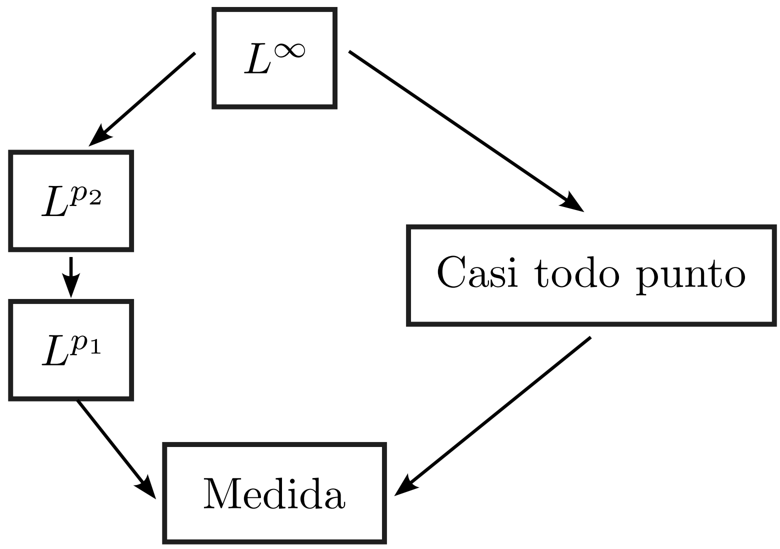
   (a) ¿Cuál o cuáles son los tipos más fuertes, y cuál o cuales los más débiles?

   (b) Si asumimos en cambio $\mu(X) = \infty$, cuáles implicaciones entre estos tipos de convergencia dejan de ser válidos.

Solución: **(a)** La convergencia en L^∞ es la única que implica todas las demás. Todos los tipos de convergencia implican la convergencia en medida, este es el único tipo de convergencia de los cinco dados con esta propiedad.

(b) En el caso $\mu(X) = \infty$ ya no se tiene que la convergencia en L^∞ implica la convergencia en L^p, mientras que las demás implicaciones sí siguen siendo válidas. Tampoco se tiene que la convergencia en casi todo punto implica la convergencia en medida, mientras todos los otros modos sí siguen implicando la convergencia en medida.

Observación: El diagrama completo de convergencias bajo la hipótesis $\mu(X) < \infty$ se ve de la siguiente forma. También la implicación $L^{p_2} \Rightarrow L^{p_1}$ deja de ser cierta si $\mu(X) = \infty$.



3. Dado $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}^d$ sea $f_h(x) = f(x - h)$.

   (a) Demuestra que si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_h \to f$ uniformemente.

   (b) Sea $p \in [1, \infty)$. Demuestra que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_h \to f$ en L^p.

   (c) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces $f * g$ es uniformemente continua.

(d) Demuestra que para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^d)$ con $m(A)m(B) > 0$, existe $B_\varepsilon(x_0) \subseteq A + B$ para algún $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Solución: **(a)** Dado que f es continua con soporte compacto se tiene que es uniformemente continua. Por definición, tenemos que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f - f_h\|_\infty < \varepsilon$ si $|h| < \delta$. Es decir que $f_h \to f$ uniformemente.

(b) Dado $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\varepsilon > 0$, sea $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Tenemos así que

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \leq 2\varepsilon + \|g - g_h\|_p.$$

Gracias a la primera parte, existe $\delta > 0$ tal que el último término es menor que ε para $|h| < \delta$. Con esto concluimos la demostración de la segunda parte.

(c) Para la convolución estimamos

$$|f * g(x) - f * g(x + h)| \leq \|f - f_h\|_1 \|g\|_\infty.$$

Usando la segunda parte obtenemos que $f*g$ es uniformemente continua dado que $\|f - f_h\|_1 \to 0$ cuando $|h| \to 0$.

(d) Para la última parte asumamos sin pérdida de generalidad que A es acotado. En caso contrario tomamos $A_R = A \cap B_R$ para un R suficientemente grande (tal que $m(A_R) > 0$) y observamos que $A_R + B \subseteq A + B$.

Por definición de la convolución

$$\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x - y)\mathbb{1}_B(y)dy = m((A - x) \cap B) \geq 0.$$

Además por Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B dx = m(A)m(B) > 0.$$

Por la parte (c) sabemos que $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ es continua y por lo tanto existe una bola $B_\varepsilon(x_0)$ donde $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B > 0$. Dado que para todo $x \in B_\varepsilon(x_0)$ se tiene que $(A - x) \cap B$ es no-nulo, se tiene que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x = a + b$.

4. Sea $\Gamma \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Demuestra que

$$\Gamma(x + 1) = x^x e^{-x} \int_{-x}^\infty \exp(x \ln(1 + t/x) - t)dt$$

(b) Demuestra que para todo $\varepsilon \in (-1, \infty)$, existe alguna constante $C > 0$ tal que si $t = \varepsilon x$

$$\left| x \ln\left(1 + t/x\right) - t + t^2/(2x) \right| \leq C|t|^3/x^2.$$

(c) (Stirling) Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1/2}e^{-x}} = \sqrt{2\pi}$$

Solución: **(a)** Tomando el cambio de variable $t = x + s$ y usando propiedades de la exponencial y el logaritmo obtenemos que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \int_0^\infty \exp(x \ln t - t) dt = x^x e^{-x} \int_{-x}^\infty \exp(x \ln(1+s/x) - s) ds.$$

Observación: La función $t \mapsto t^x e^{-t}$ alcanza su máximo $x^x e^{-x}$ en $t = x$. El cambio de variables $t = x + s$ centra la integral en el máximo del integrando. La renormalización del integrando al dividir por $x^x e^{-x}$ hace que el nuevo integrando sea acotado, uniformemente en x. Ambas transformaciones resultan convenientes cuando queremos estudiar el comportamiento asintótico de la integral.

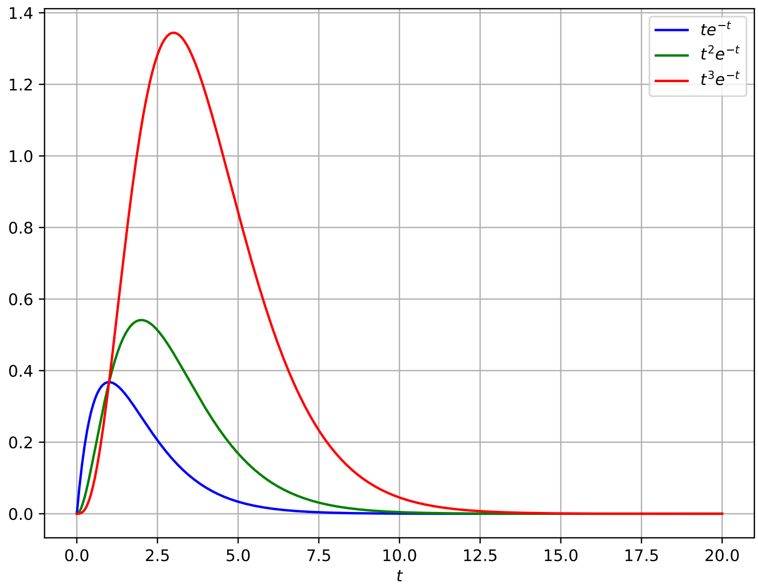


Figura 1: Gráficas de $t \mapsto t^x e^{-t}$ para $x = 1, 2, 3$.

(b) Por la expansión de Taylor de segundo orden de $f(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon)$ alrededor de $\varepsilon = 0$ tenemos que para algún z entre 0 y ε

$$\ln(1 + \varepsilon) = f(0) + f'(0)\varepsilon + f''(0)\varepsilon^2/2 + f'''(z)\varepsilon^2/6 = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/(3(1 + z)^3).$$

Tomando $\varepsilon = t/x$ y multiplicando la expresión por x llegamos a que

$$\left| x \ln(1 + t/x) - t + t^2/(2x) \right| = |t|^3/(3x^2|1 + z|^3).$$

Tomamos así $C = 1/(3|1 + z|^3)$ para concluir el estimado propuesto.

(c) La parte (b) sugiere que el integrando en (a) aproxima a $\exp(-t^2/x)$ cuando $x \to \infty$. Tenemos en este caso que la integral se puede calcular tomando el cambio de variables $t = \sqrt{x}u$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-t^2/x) dt = \sqrt{x} \int_{-\infty}^\infty \exp(-u^2) du = \sqrt{2\pi x}.$$

Si tomamos el mismo cambio de variables en (a) tenemos que

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1/2}e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x\ln(1+u/\sqrt{x}) - \sqrt{x}u)\mathbb{1}_{(-\sqrt{x},\infty)}(u)du.$$

El integrando converge puntualmente a $\exp(-u^2)$ cuando $x \to \infty$, gracias al cálculo en la parte (b). Basta encontrar ahora un mayorizante en L^1 para poder concluir usando el teorema de convergencia dominada.

Calculando la segunda derivada de $f(t) = \ln(1+t)$, tenemos que $f''(t) = -(1+t)^{-2}$. Para $t \in (-1,1)$ tenemos que $f''(t) \leq -1/4$ y por el teorema fundamental del cálculo $f'(t) \leq 1-t/4$. Una vez más por el teorema fundamental del cálculo, $\ln(1+t) - t \leq -t^2/8$. Para $t \geq 1$ usamos que f es cóncava y por lo tanto $\ln(1+t) - t \leq -(1-\ln 2)t$.

Tomando $t = u/\sqrt{x}$ y $x \geq 1$ conseguimos ver que

$$\begin{aligned}
&\exp(x\ln(1+u/\sqrt{x}) - \sqrt{x}u)\mathbb{1}_{(-\sqrt{x},\infty)}(u) \\
&\leq \exp(-u^2/8)\mathbb{1}_{(-\sqrt{x},\sqrt{x})}(u) + \exp(-(1-\ln 2)\sqrt{x}u)\mathbb{1}_{[\sqrt{x},\infty)}(u) \\
&\leq \exp(-u^2/8) + \exp(-(1-\ln 2)u)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(u).
\end{aligned}$$

Esta última función es independiente de x y pertenece a $L^1(\mathbb{R})$.

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Parcial 1

Teoría de la medida

1. (7 **puntos**) Esboza los pasos para la construcción de la medida producto usando el proceso de extensión de Carathéodory.

2. Considera las siguientes sucesiones de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$a_k := \mathbb{1}_{[k,k+1]}, \quad b_k := \frac{1}{k}\mathbb{1}_{[0,k]}, \quad c_k := k\mathbb{1}_{(0,1/k)}, \quad d_k := \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n},k2^{-n}]} \text{ para } n := \lfloor \log_2 k \rfloor$$

   (a) (4 **puntos**) ¿Cuáles convergen en casi todo punto, cuáles en L^∞, cuáles en L^1, y cuáles en medida?

   (b) (1 **punto**) Da un ejemplo de una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que converja en medida, pero no en ninguno de los otros tres modos.

   (c) (1 **punto**) Da un ejemplo de una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no converja en L^∞, pero si en todos los otros tres modos.

3. Sea V un espacio vectorial real y $n\colon V \to [0,\infty)$ tal que:

   1. **Homogeneidad:** Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, $n(\lambda v) = |\lambda| n(v)$,
   2. $\{n \leq 1\}$ es convexo.

   (a) (2 **puntos**) Demuestra que $W := \{n = 0\}$ es un espacio vectorial.

   (b) (2 **puntos**) Demuestra que n se puede definir en el espacio cociente V/W tal que para $z \in V/W$ se tiene que $n(z) = n(v)$ si $v \in V$ es un representante de la clase de equivalencia de z.

   (c) (3 **puntos**) Demuestra que n define una norma sobre V/W y una semi-norma sobre V.

4. Sea $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   (a) (3 **puntos**) Demuestra que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \left(\int_{-u}^{u} \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^{x-1} \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^{y-1} dv\right) e^{-\sqrt{2}u}du.$$

   (b) (2 **puntos**) Demuestra que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Parcial 1

Teoría de la medida

1. (7 **puntos**) Esboza los pasos para la construcción de la medida producto usando el proceso de extensión de Carathéodory.

Solución: El teorema de extensión de Carathéodory dice que dada una premedida σ-finita ρ sobre un álgebra $\mathcal{E}$, existe una única medida que extiende a ρ sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$.

En el caso de la medida producto para los espacios $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ usaremos $\mathcal{R}$ el conjunto de rectángulos $R = A \times B$ con $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$, y la función $\rho \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ dada por

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Finalmente $\mathcal{E} = \{E = R_1 \cup \ldots \cup R_n \mid \text{ rectángulos disjuntos}\}$ son los conjuntos elementales.

Paso 1: $\mathcal{E}$ es un álgebra. Observamos que $\mathcal{R}$ es cerrado bajo intersecciones y sus complementos son elementales. Demostramos de forma inductiva que $\mathcal{E}$ es cerrado bajo uniones finitas y usando las leyes de Morgan vemos que también es cerrado bajo complementos.

Paso 2: Podemos extender ρ a $\mathcal{E}$ usando

$$\rho(E) = \rho(R_1) + \ldots + \rho(R_n)$$

si $R_1 = A_1 \times B_1, \ldots, R_n = A_n \times B_n$ son rectángulos disjuntos cuya unión es E. Esta propiedad se cumple si $E = A \times B$ es un rectángulo dado que

$$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A_1}(x)\mathbb{1}_{B_1}(y) + \ldots + \mathbb{1}_{A_n}(x)\mathbb{1}_{B_n}(y).$$

Integrando de forma iterada en μ y ν obtenemos que

$$\mu(A)\nu(B) = \mu(A_1)\nu(B_1) + \ldots + \mu(A_n)\nu(B_n).$$

Para cualesquiera dos particiones finitas de un elemental E usando rectángulos encontramos un refinamiento común, también finito y usando rectángulos, y vemos que la suma de las medidas en los rectángulos en el refinamiento debe ser igual a la suma de las medidas en las particiones originales.

Paso 3: ρ es una pre-medida. La aditividad finita se sigue de la definición. El argumento en el paso 2 se puede extender para una partición numerable por rectángulos. En general se tiene que si $\{E_k\} \subseteq \mathcal{E}$ es una sucesión disjunta tal que $\bigcup_{k\geq 1} E_k = E \in \mathcal{E}$, entonces $\rho(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_k)$. Esto se demuestra descomponiendo a E en una cantidad finita de rectángulos disjuntos.

2. Considera las siguientes sucesiones de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$a_k := \mathbb{1}_{[k,k+1]}, \quad b_k := \frac{1}{k}\mathbb{1}_{[0,k]}, \quad c_k := k\mathbb{1}_{(0,1/k)}, \quad d_k := \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n},k2^{-n}]} \text{ para } n := \lfloor \log_2 k \rfloor$$

   (a) (4 **puntos**) ¿Cuáles convergen en casi todo punto, cuáles en L^∞, cuáles en L^1, y cuáles en medida?
   (b) (1 **punto**) Da un ejemplo de una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que converja en medida, pero no en ninguno de los otros tres modos.
   (c) (1 **punto**) Da un ejemplo de una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no converja en L^∞, pero si en todos los otros tres modos.

Solución: (a)

- Solamente $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ y $\{c_k\}$ convergen en casi todo punto.
- Solamente $\{b_k\}$ converge en L^∞.
- Solamente $\{d_k\}$ converge en L^1.
- Solamente $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ y $\{d_k\}$ convergen en medida.

(b) kd_k converge a cero exclusivamente en medida.
(c) $\mathbb{1}_{(0,1/k)}$ converge a cero en casi todo punto, en L^1, en medida, pero no en L^∞.

3. Sea V un espacio vectorial real y $n\colon V \to [0,\infty)$ tal que:

   1. **Homogeneidad:** Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, $n(\lambda v) = |\lambda| n(v)$,
   2. $\{n \leq 1\}$ es convexo.

   (a) (2 **puntos**) Demuestra que $W := \{n = 0\}$ es un espacio vectorial.
   (b) (2 **puntos**) Demuestra que n se puede definir en el espacio cociente V/W tal que para $z \in V/W$ se tiene que $n(z) = n(v)$ si $v \in V$ es un representante de la clase de equivalencia de z.
   (c) (3 **puntos**) Demuestra que n define una norma sobre V/W y una semi-norma sobre V.

Solución: **(a)** De la homogeneidad tenemos que si $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda w \in W$. Queda por demostrar que W es cerrado bajo sumas.

De las propiedades de n se sigue que para todo $\varepsilon > 0$, $\{n \leq \varepsilon\} = \varepsilon\{n \leq 1\}$ es convexo. Por lo tanto, para $v_1, v_2 \in W$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que $(v_1+v_2)/2 \in \{n \leq \varepsilon\}$. Por la homogeneidad $(v_1 + v_2) \in \{n \leq 2\varepsilon\}$. Tomando $\varepsilon \to 0$ deducimos que $(v_1 + v_2) \in W$.

(b) Para ver que n está bien definida en el cociente tenemos que ver que para $v, w \in V$ con $w \in W$ se tiene que $n(v + w) = n(v)$. Si $n(v) = 0$ se sigue del apartado previo, asumimos por lo tanto $n(v) > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ escribimos a $v + w$ como la siguiente combinación lineal para $t = 1/(1 + \varepsilon) \in (0, 1)$

$$v + w = t(1 + \varepsilon)v + (1 - t)\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}w.$$

Dado que $(1 + \varepsilon)v, \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}w \in \{n \leq (1 + \varepsilon)n(v)\}$, tenemos que $v + w \in \{n \leq (1 + \varepsilon)n(v)\}$. Tomando $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos que $n(v + w) \leq n(v)$. Por otro lado, si tomamos ahora $v' = v + w$ y $w' = -w \in W$, entonces $n(v) = n(v' + w') \leq n(v') = n(v + w)$.

(c) De las propiedades de $n\colon V \to [0, \infty)$ se sigue que $n\colon V/W \to [0, \infty)$ satisface

1. **Homogeneidad:** Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z \in V/W$, $n(\lambda z) = |\lambda|n(z)$,
2. $\{n \leq 1\}$ es convexo.

Adicionalmente, de (a) y (b) se sigue que

3. $n(z) = 0$ si y solo si $z = 0$.

Basta demostrar la desigualdad triangular en $(V \setminus W) \setminus \{0\}$ para ver que n es una norma.

Sean $z_1, z_2 \in (V \setminus W) \setminus \{0\}$ y sean $\theta_1 = z_1/n(z_1)$ y $\theta_2 = z_2/n(z_2)$, ambos vectores en $\{n \leq 1\}$. Tenemos que para $t = n(z_2)/(n(z_1) + n(z_2)) \in (0, 1)$

$$\frac{z_1 + z_2}{n(z_1) + n(z_2)} = (1 - t)\theta_1 + t\theta_2 \in \{n \leq 1\}.$$

Gracias a la homogeneidad deducimos que la desigualdad triangular se cumple en V/W.

La desigualdad triangular en V/W implica la desigualdad triangular en V. Por lo tanto n satisface las propiedades de la semi-norma. Pudiese no ser una norma si W no fuese el espacio trivial.

4. Sea $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(a) (3 **puntos**) Demuestra que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \left(\int_{-u}^{u} \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^{x-1} \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^{y-1} dv \right) e^{-\sqrt{2}u}du.$$

(b) (2 **puntos**) Demuestra que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Solución: **(a)** Del teorema de Tonelli sobre $\Omega = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, s > 0\}$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_\Omega t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dm(t,s).$$

Tomando el cambio de variable dado por una rotación de 45 grados: $t = (u+v)/\sqrt{2}$, $s = (u-v)/\sqrt{2}$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \left(\int_{-u}^{u} \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^{x-1} \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^{y-1} dv \right) e^{-\sqrt{2}u}du.$$

(b) Tomando el cambio de variables $v = u(2t-1)$

$$\int_{-u}^{u} \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^{x-1} \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^{y-1} dv = (\sqrt{2}u)^{x+y-1}\sqrt{2}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Por lo tanto, tomando un último cambio de variables $\sqrt{2}u = w$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^\infty (\sqrt{2}u)^{x+y-1}e^{-\sqrt{2}u}\sqrt{2}du\right)\left(\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\right)\\ &= \Gamma(x+y)\left(\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\right).\end{aligned}$$

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Parcial 1.2

Teoría de la medida

1. (7 **puntos**) Esboza los pasos para la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ usando el proceso de extensión de Carathéodory.

2. Considera $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita y los siguientes modos de convergencia: En casi todo punto, en L^∞, en L^1, y en medida.

   (a) (2 **puntos**) Muestra el diagrama de implicaciones entre los distintos modos de convergencia.

   (b) (4 **puntos**) Una sucesión de funciones reales sobre un espacio de medida finita puede converger en distintas combinaciones de los cuatro modos dados. El diagrama de la parte anterior debería indicar seis escenarios posibles (incluidos dos triviales). Muestra un ejemplo de la convergencia en cada caso.

3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$, y $f\colon X \to \mathbb{R}$ también medible:

   (a) (2 **puntos**) Demuestra que $\{f_k\}$ converge a f en casi todo punto si y solo si para todo entero positivo n

   $$\mu\left(\limsup_{k\to\infty}\{|f_k - f| > 1/n\}\right) = \mu\left(\left\{\limsup_{k\to\infty}|f_k - f| > 1/n\right\}\right) = 0.$$

   (b) (2 **puntos**) Demuestra que $\{f_k\}$ converge en L^∞ a f si para todo entero positivo n

   $$\mu\left(\{|f_k - f| > 1/n\}\right) = 0 \text{ eventualmente.}$$

   (c) (3 **puntos**) (Egorov) Sea $\mu(X) < \infty$, asume que f_k converge a f en casi todo punto, y sea $\varepsilon > 0$. Demuestra que existe $\Sigma \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(\Sigma) < \varepsilon$ y f_k converge uniformemente a cero en $X \setminus \Sigma$.

4. (5 **puntos**) Demuestra que

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = 4\iint_\Delta \frac{dudv}{2-u^2+v^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

   donde Δ es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$ y $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

   Pistas: Piensa en la serie geométrica. También la siguiente identidad trigonométrica puede ser útil

   $$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \tan(\alpha/2).$$