CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Final 1.0

Teoría de la medida

1. Esboza los pasos para la construcción de la descomposición de Hahn.
2. Sea $K_r(x) := r^{-d}K_1(x/r)$ donde $K_1(x) = \pi^{-d/2}e^{-|x|^2}$:
   (a) Demuestra que para todo $p \in [1,\infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $K_r * f \to f$ en L^p cuando $r \to 0^+$.
   (b) Demuestra que para todo $p \in [1,\infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $K_r * f \to f$ en casi todo punto.
   (c) Da ejemplos que muestren que no es posible extender el resultado a $p = \infty$.
3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $p \in (0,\infty)$ y $f_k, f \in L^p$ tal que $f_k \to f$ en casi todo punto. Demuestra que $f_k \to f$ en L^p si y solo si $\|f_k\|_p \to \|f\|_p$.
4. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\{f_k\} \subseteq L^p$ una sucesión acotada en L^p tal que $f_k \to f$ en casi todo punto:
   (a) Demuestra que si $p \in (1,\infty)$, entonces $f_k \to f$ débilmente en L^p.
   (b) Demuestra que si $\mu(X) < \infty$ y $p = \infty$, entonces $f_k \to f$ débilmente estrella en L^∞.
   (c) Da un contraejemeplo para este resultado con $p = 1$.

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Final

Teoría de la medida

1. (24 **puntos**) Verdadero o falso:
   (1) Todo conjunto numerable de $\mathbb{R}$ es medible.
   (2) Todo conjunto de $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue cero es numerable.
   (3) Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ medible y $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $\varphi \circ f$ es medible.
   (4) Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $f \circ g$ es medible.
   (5) Dada $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible y $T\colon \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^d$ lineal, $f \circ T$ es medible.
   (6) La convergencia en casi todo punto implica la convergencia en medida.
   (7) La convergencia en medida implica la convergencia en casi todo punto.
   (8) La función $f\colon B_1 \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|^{-d}$ pertenece a $L^2(B_1)$.
   (9) La función $f\colon \mathbb{R}^d \setminus B_1 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|^{-d}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}^d \setminus B_1)$.
   (10) Si $\nu \ll \mu$ entonces $\mu \ll \nu$.
   (11) Si $\nu \perp \mu$ entonces $\mu \perp \nu$.
   (12) La variación total se calcula tomando el valor absoluto de la medida signada.
2. (9 **puntos**) Esboza los pasos de la demostración del Teorema de Radon-Nikodym.
3. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $r > 0$, sea $f_r(x) := \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy$:
   (1) (2 **puntos**) Demuestra que $f_r \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
   (2) (3 **puntos**) Demuestra que $f_r \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $p \in [1, \infty)$.
   (3) (2 **puntos**) Demuestra que lo mismo no se cumple para $p = \infty$.
4. Dado $1 < p_0 < p_1 < \infty$, consideramos el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}$ con la norma
   $$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} := \inf\{\|f_0\|_{p_0} + \|f_1\|_{p_1} \mid f = f_0 + f_1\}.$$
   (1) (2 **puntos**) Demuestra que esta construcción define un espacio de Banach.
   (2) (2 **puntos**) Demuestra que para todo $p \in [p_0, p_1]$, $L^p \subseteq L^{p_0} + L^{p_1}$ y que el mapa de inclusión es continuo.
   (3) (3 **puntos**) Dados $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ y $1/p_1 + 1/q_1 = 1$, $g \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$, y $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$ sea $\lambda_g(f) = \int_X g f d\mu$. Demuestra que el mapeo $g \in L^{q_0} \cap L^{q_1} \mapsto \lambda_g \in (L^{p_0} + L^{p_1})^*$ está bien definido y es continuo cuando $L^{q_0} \cap L^{q_1}$ tiene la norma
   $$\|g\|_{L^{q_0} \cap L^{q_1}} := \|g\|_{q_0} + \|g\|_{q_1}.$$
5. (3 **puntos**) Dado $p \in [1, \infty)$, Demuestra que $f_k = k^{1/p} \mathbb{1}_{(0,1/k)}$ converge débilmente a cero si y solo si $p > 1$.