Geometría analítica **Final** **mayo del 2019**

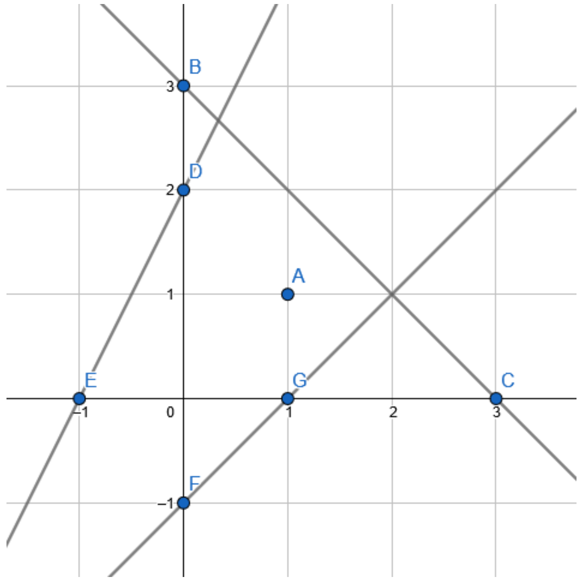
- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son 12 puntos.
  El total se calcula tomando los tres problemas con mayor calificación.
- No se permite el uso de notas, libros, ni dispositivos electrónicos.
- Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.
- Sus soluciones deben ser legibles y estar bien organizadas.
  No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: ____________________

Problema:	1	2	3	4	5	6	Total
Valor:	4	4	4	4	4	4	12
Puntaje:							

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) ¿Cuál de las siguientes tres rectas es la más lejana a A?



Solución:

BC:

pendiente: -1

ecuación de la recta: $y-3=(-1)x$ ó $x+y-3=0$

distancia:

$$\frac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

DE:

pendiente: 2

ecuación de la recta: $y-2=2x$ ó $2x-y+2=0$

distancia:

$$\frac{|2-1+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

FG:

pendiente: 1

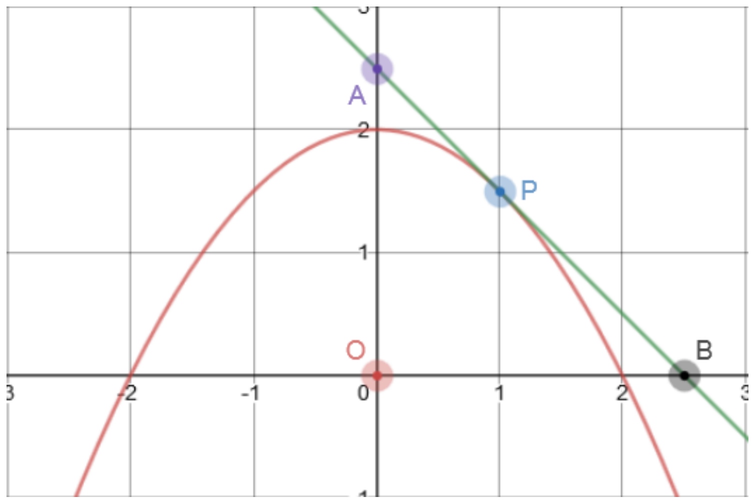
ecuación de la recta: $y+1=x$ ó $x-y-1=0$

distancia:

$$\frac{|1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

DE **es la recta más lejana**

2. (+4) Halle el área de triángulo OAB en la siguiente figura donde la curva ilustrada es una parábola.



Solución:

Parábolas con raíces ± 2: $y = A(x+2)(x-2)$.

Parábola pasa por $(0,2)$: $A = -1/2$.

$P = (1, y_P)$ está en la parábola: $y_P = (-1/2)(1+2)(1-2) = 3/2$.

Sea m la pendiente de la recta tangente a la parábola por P. Sustitutyendo $y = m(x-1) + 3/2$ en $y = -1/2x^2 + 2$

$$(-1/2)x^2 - mx + (m + 1/2) = 0$$

Igualando el discriminante a cero

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m = -1$$

La recta tangente tiene ecuación $y = (-1)(x-1) + 3/2$ ó $y + x = 5/2$ de donde las intersecciones con los ejes coordenados quedan $(0, 5/2)$ y $(5/2, 0)$ y finalmente el área deseada es

$$A = \frac{5/2 * 5/2}{2} = \frac{25}{8}$$

3. (+4) Identifique el lugar geométrico que corresponde a cada ecuación

A $x^2 + x + y = 1$

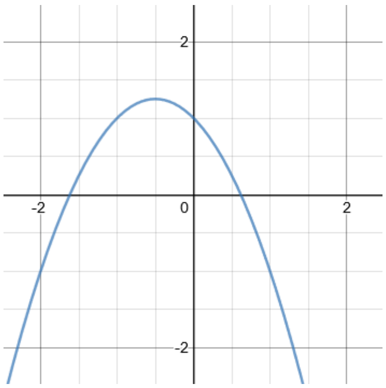
B $x^2 - x + y = 1$

C $x^2 + x + y^2 = 1$

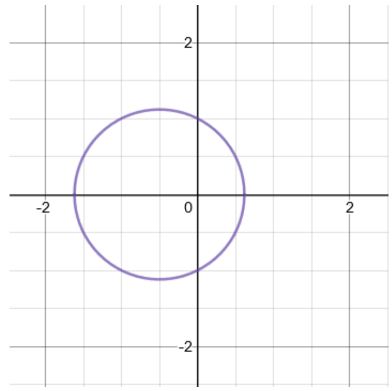
D $x^2 + x - y^2 > 1$

E $x^2 - x + y^2 > 1$

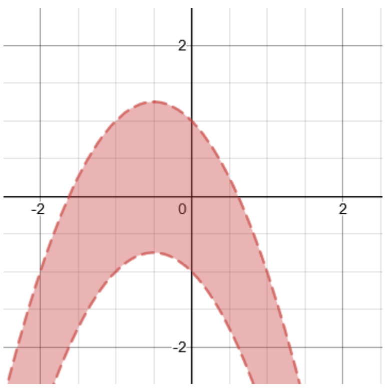
F $|x^2 + x + y| < 1$



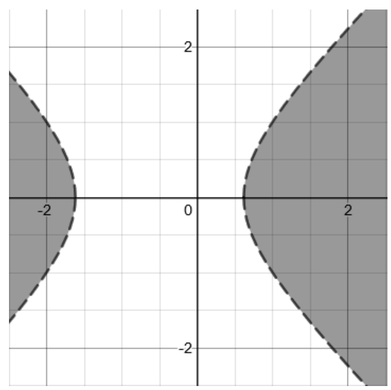
A



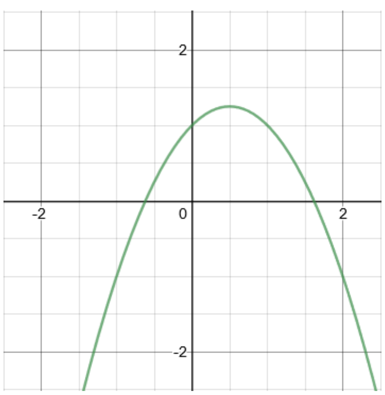
C



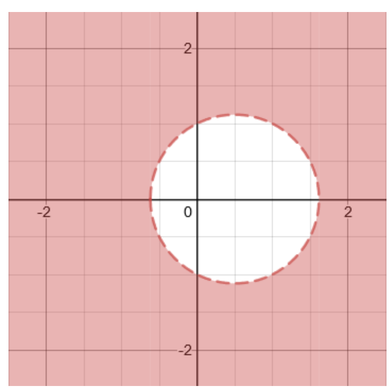
F



D



B



E

4. (+4) Dé la ecuación de cada una de las siguientes elipses:

   - Focos: $F_1 = (-1, 0)$, $F_2 = (1, 0)$ y pasa por $(1, 1)$.
   - Focos: $F_1 = (0, 0)$, $F_2 = (1, 1)$ y $a = 2$.
   - Centro: $C = (0, 0)$, foco $F = (1, 2)$ y vértice $V = (2, 4)$.
   - Foco $F = (0, 0)$, directriz $x + y = 1$ y excentricidad $\epsilon = 1/2$.

Solución:

1. Calculamos $2a$ usando que $(1, 1)$ está en la elipse

$$2a = F_1P + F_2P = \sqrt{5} + 1$$

Por Pitágoras calculamos el semieje menor

$$b^2 = a^2 - (F_1F_2/2)^2 = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}4} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Dada que los focos están alineado horizontalmente nos queda la ecuación:

$$\frac{x^2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1$$

2. Usando la definición de la elipse como el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ para el cual $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$
$$x + y + 7 = 4\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 + 2xy + 14x + 14y + 49 = 16(x^2 + y^2)$$
$$15x^2 + 15y^2 - 2xy - 14x - 14y - 49 = 0$$

3. El otro foco es simétrico por el centro, es decir $F' = (-1, -2)$. El semieje mayor estyá dado según

$$a = CV = \sqrt{20}$$

Usando la definición de la elipse como el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ para el cual $PF + PF' = 2a$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = 2\sqrt{20}$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 80 - 4\sqrt{20}\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} + (x+1)^2 + (y+2)^2$$
$$x + 2y + 20 = \sqrt{20}\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$
$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 40x + 80y + 400 = 20(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)$$
$$19x^2 + 16y^2 - 4xy - 300 = 0$$

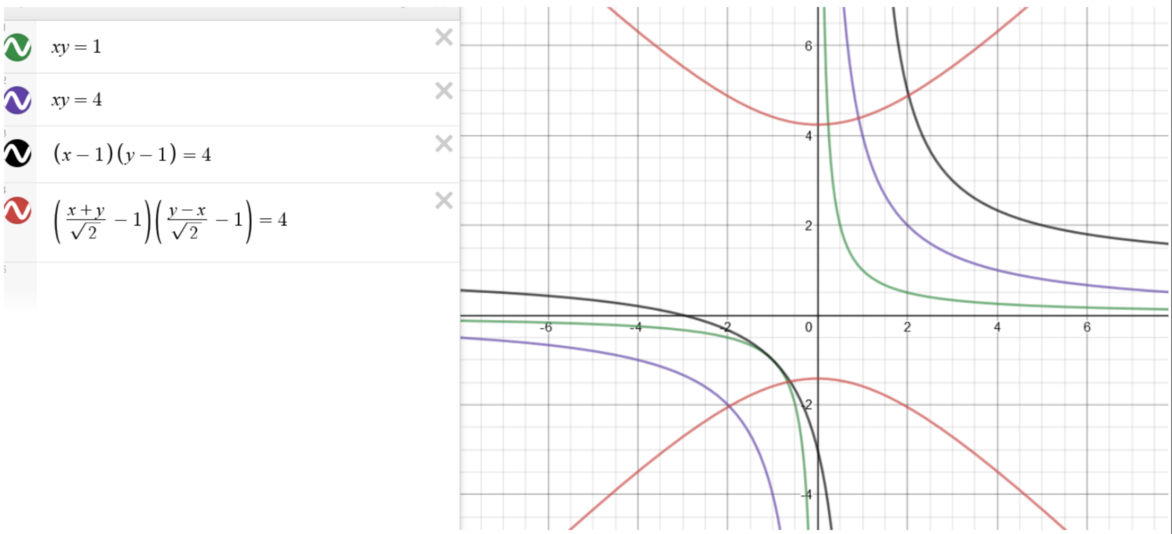
4. Usando la definición de la elipse como el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ para el cual $PF/Pl = \varepsilon$

$$\frac{x^2 + y^2}{(x + y - 1)^2/2} = \frac{1}{4}$$
$$8(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$
$$7x^2 + 7y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$$

5. (+4) Sea $H = \{(x, y) \mid xy = 1\}$. Dibuje y escriba la ecuación del lugar geométrico que resulta en cada uno de los siguientes pasos:

   1. Escalamos H con factor 2 horizontal y verticalmente.
   2. Trasladamos el resultado por el vector $(1, 1)$.
   3. Rotamos el resultado por un ángulo de $45°$ (en el sentido anti-horario).

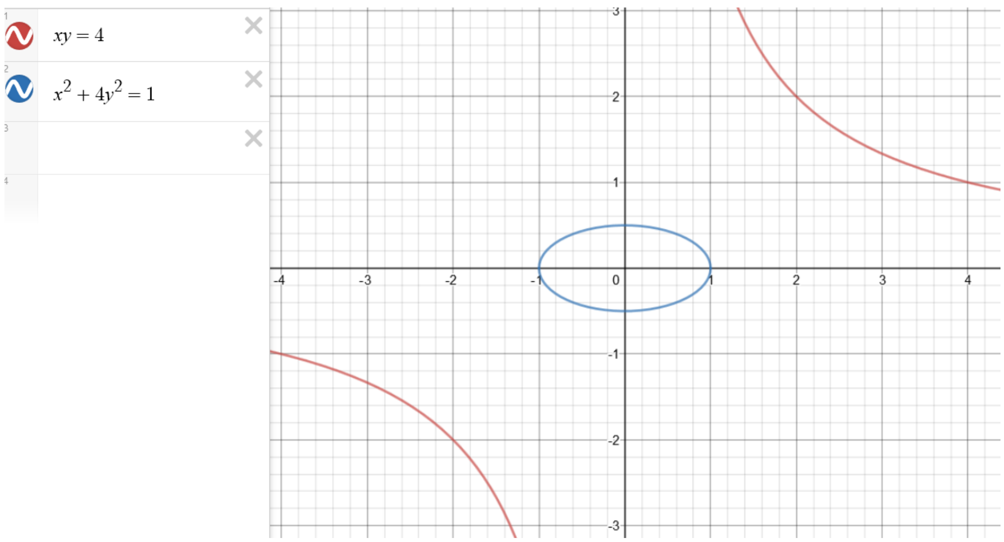
Solución:



6. (+4) Demuestre que para cualquier punto P en la hipérbola $xy = 4$, y cualquier punto Q en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ la distancia entre ellos siempre es por lo menos 1.

Solución:

Consideremos la gráfica de las cónicas para poder tener una mejor idea de cual estrategia podremos usar



Observemos que por la simetría respecto del origen basta con demostrar el enunciado paraq puntos en el primer cuadrante. Para esto veremos que podemos separar la elipse de la hipérbola por rectas paralelas de distancia ≥ 1.

Gracias a la simetría de $xy = 4$ por la recta $y = x$ tenemos que la recta $x + y = 4$ es tangente a $xy = 4$ por $(2, 2)$.

Por otro lado determinamos cual recta de pendiente -1 es tangente a la elipse en el primer cuadrante. Si (x_0, y_0) pertenece a la elipse, la recta tangente por dicho punto es

$$x_0 x + 4y_0 y = 4$$

de modo que el punto deseado debe satisfacer $x_0 = 4y_0$ además de $x_0^2 + 4y_0^2 = 1$. De estas ecuaniones se obtiene que $(x_0, y_0) = (4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ es la única solución en el primer cuadrante y $x + y = \sqrt{5}$ la recta tangente.

Finalmente observemos que la distancia entre las rectas $x + y = \sqrt{5}$ y $x + y = 4$ es

$$\frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} > 1$$