Geometría analítica **Parcial 2** **abril del 2019**

- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son 12 puntos.
  El total se calcula tomando los tres problemas con mayor calificación.
- No se permite el uso de notas, libros, ni dispositivos electrónicos.
- Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.
- Sus soluciones deben ser legibles y estar bien organizadas.
  No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: ____________________

Problema:	1	2	3	4	5	6	Total
Valor:	4	4	4	4	4	4	12
Puntaje:							

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. Encuentra la ecuación para cada caso:
   (I) (+1) La recta de pendiente 3 que pasa por $(2, 1)$.
   (II) (+1) La recta que intersecta al eje x en $(3, 0)$ y al eje y en $(0, 2)$.
   (III) (+1) La circunferencia de radio 3 con centro en $(2, 1)$.
   (IV) (+1) La circunferencia que pasa por el origen e intersecta al eje x en $(3, 0)$ y al eje y en $(0, 2)$.

Solución:

1. $y - 1 = 3(x - 2)$
2. $2x + 3y = 6$
3. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$
4. $x^2 - 3x + y^2 - 2y = 0$

2. (+4) Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo que forma la recta $3x + 2y = 6$ con los ejes coordenados, es decir que es tangente a sus tres lados.

Solución:

El incentro está dado por las intersecciones de las bisectrices de las cuales una de ellas es la recta $y = x$. Calculamos ahora la bisectriz en el punto $(0, 3)$ buscándo un punto $(a, 0)$ equidistante del eje y y la recta $3x + 2y = 6$, es decir

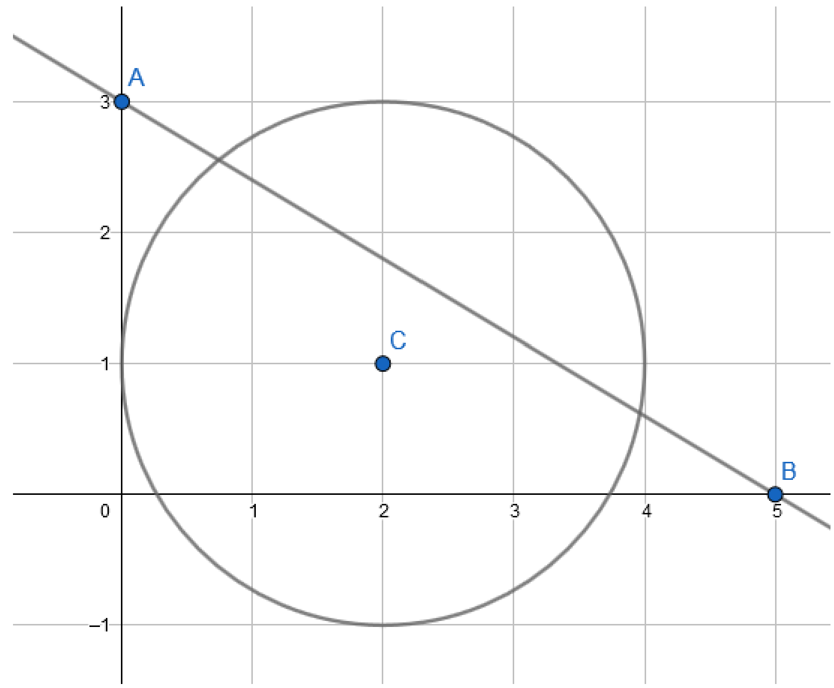
$$a^2 = \frac{(3a-6)^2}{13} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{-9 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

Tomamos la raíz positiva la cual da la intersección con el lado del triángulo. La ecuación de la bisectriz es entonces

$$y = \frac{6}{9 - 3\sqrt{13}}x + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\frac{9 + 3\sqrt{13}}{6}x + 3$$

Intersectando con $y = x$ nos queda el incentro con coordenadas (r, r) donde $r = 18/(15 + 3\sqrt{13})$ es también el inradio. Finalmente la ecuación deseada viene dada por $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

3. (+4) Halle las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta en el siguiente dibujo



Solución:

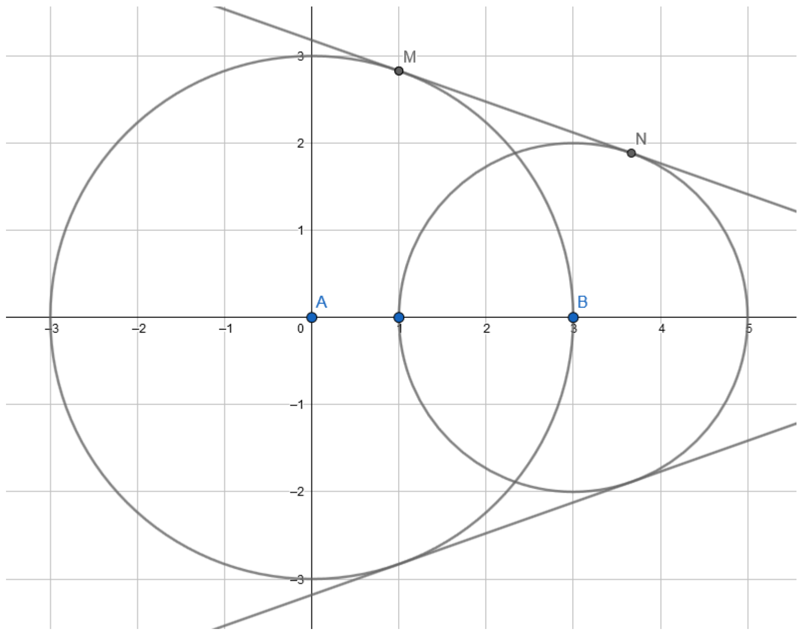
Buscamos intersectar la recta de ecuación $y = -(3/5)x + 3$ con la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Sustituyendo $y = -(3/5)x + 3$ en la ecuación de la circunferencia nos queda

$$17x^2 - 80x + 50 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{40 \pm 5\sqrt{30}}{17}$$

Usando $y = -(3/5)x + 3$ conseguimos además las intersecciones deseadas

$$(\frac{40 - 5\sqrt{30}}{17}, \frac{27 + 3\sqrt{30}}{17}), (\frac{40 + 5\sqrt{30}}{17}, \frac{27 - 3\sqrt{30}}{17})$$

4. (+4) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a las circunferencias en la siguiente figura.



Pista: Las rectas tangentes se intersectan en un punto P sobre la línea que une los centros (eje x en este caso). Más aún, los puntos de tangencia M y N que se muestran en la gráfica son tales que los triángulos PMA y PNB son similares.

Solución:

Dado $P = (a, 0)$ como en la pista tenemos que por la semejanza de triángulos que

$$\frac{AP}{AM} = \frac{a}{3} = \frac{BP}{BM} = \frac{a-3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = 9$$

Nos enfocamos ahora en encontrar las rectas tangentes a $x^2 + y^2 = 9$ que pasa por $(9, 0)$. La rectas deseadas tienen la forma $y = m(x - 9)$, de modo que al sustituir en la ecuación de la circunferencia nos queda

$$(m^2 + 1)x^2 - 18m^2x + (81m^2 - 9) = 0$$

para que exista una única intersección m tiene que satisfacer

$$(18m^2)^2 = 4(m^2 + 1)(81m^2 - 9) \qquad \Rightarrow \qquad m = \pm 1/2\sqrt{2}$$

Por lo tanto nos quedan las ecuaciones $2\sqrt{2}y = \pm(x - 3)$

5. Encuentre la ecuación de la parábola para cada caso:

   (I) (+1) Foco $(0,0)$ y directriz $y=-1$.

   (II) (+1) El eje es vertical y pasa por los puntos $(1,0)$, $(2,3)$, $(3,0)$.

   (III) (+1) Foco $(0,0)$ y vértice $(1,1)$.

   (IV) (+1) El eje es horizontal, pasa por $(0,0)$, $(2,1)$, y la recta $y=3x$ es tangente por arriba.

Solución:

1. $x^2 = 2y+1$
2. $y = 2(x-1)(x-3)$
3. $x^2+y^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}$
4. $x = Ay^2+By+C$. Como pasa por $(0,0)$ tenemos que $C=0$. Como pasa por $(2,1)$ tenemos que $A+B=2$. Como $y=3x$ es tangente tenemos que $x = 9Ax^2+3Bx$ o equivalentemente $x(9Ax+3B-1)=0$ tiene como única solución $x=0$, es decir que $B=1/3$ y por lo tanto $A=5/3$. Nos queda la ecuación $3x = 5y^2+y$.

6. (+4) Sea $P = \{(x, y) \mid x = y^2\}$. Dibuje y escriba la ecuación del lugar geométrico que resulta en cada uno de los siguientes pasos:

   1. Escalamos P con factor 2 horizontal y verticalmente.
   2. Trasladamos el resultado por el vector $(1, 1)$.
   3. Rotamos el resultado por un ángulo de $45°$ (en el sentido anti-horario).

Solución: